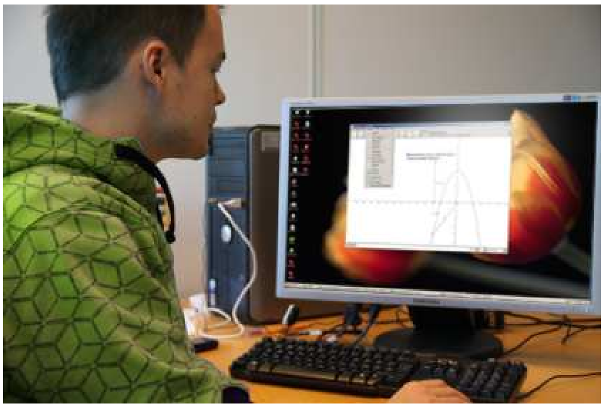
Kokemuksia Geogebran käytöstä lukiossa ja yläkoulussa

HANNU MÄKIÖ, Matematiikan lehtori, Joensuun normaalikoulu

Geogebra on ilmainen suomenkielinen dynaamisen geometrian ohjelma. Opettaja voi käyttää sitä esimerkiksi pelkästään geometristen kuvioiden piirtämiseen ja niiden liittämiseen kokeisiin tai monisteisiin. Jos käytössä on tietokone ja tykki, voi käsiteltävää asiaa havainnollistaa joko valmiilla demoilla, tai ex tempore tehdyillä kuvaajilla. Ja tietenkin, voi sitä oppilaatkin päästää Geogebraa kokeilemaan.



Lumiukoista geometrian lauseisiin

Ensimmäisellä kerralla seiskaluokkalaisten kanssa voi ohjelmaan tutustua piirtämällä vaikka lumiukon. Piirtämisessä tuotetaan geometrisia perusobjekteja. Nopeasti oppilaat kysyvät, miten värejä voidaan muuttaa. Lopuksi voi kokeilla animointia, esim. laittamalla lumiukon käden liikkumaan. Geogebra ei kuitenkaan ole piirrosohjelma, vaan sillä tehdään geometrisia konstruktioita. Esim. lumiukkoa piirtäessä voisi ensin piirtää maan vaakasuoralla viivalla. Jos lumiukon haluaa pystysuoraan, valitaan vaakasuoralta yksi piste P ja piirretään vaakasuoralle viivalle normaali pisteen P kautta. Tälle normaalille sijoitetaan pallot päällekkäin. Oikein tehtynä lumiukon saa liikkumaan edestakaisin pisteestä P liikuttamalla.

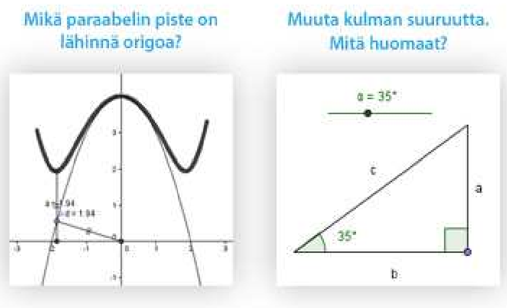
Omien seiskaluokkalaisten kanssa olen ensin tehnyt harppi-viivoitin konstruktioita perinteisesti käsin. Joitakin asioita, kuten esim. keskinormaalin piirto, voi Geogebralla tehdä suoraan yhdellä komennolla. Monimutkaisempien tehtävien kohdalla tästä on apua. Seiskaluokan geometria on täynnä käsitteitä, kuten normaali, yhdensuuntainen, samankohtainen kulma jne. Geogebra on yksi apuväline työskennellä näiden käsitteiden kanssa. Kun ohjelmalla mitataan kulman suuruus, tulee ensin valita piste kulman oikealta kyljeltä, sitten kärki ja viimeiseksi piste vasemmalta kyljeltä. Toisella järjestyksellä tulee mitattua väärä kulma. Ohjelma tukee tapaa, jolla kulman suuruus merkitään kolmella pisteellä.

Perinteisesti dynaamisen geometrian ohjelmia on käytetty havainnollistamaan geometrisia lauseita. Esim. Janan keskinormaalin piste on yhtä etäällä jana päätepisteistä. Piirretään jana, sille keskinormaali ja valitaan jokin keskinormaalin piste P. Nyt ottamalla pisteestä P kiinni, se säilyttää kaiken aikaa ominaisuuden: ”olen keskinormaalin piste”. Mitataan etäisyydet päätepisteisiin, ja voidaan huomata, että vaikka pistettä P liikutetaan, niin jokin asia säilyy. Etäisyydet janan päätepisteisiin ovat samat. Tämä perusidea toistuu monessa geometrian lauseen tutkimisessa. Itse en puhuisi lauseiden todistamisesta. Mutta todistaminen ei kuulu oikein nykyiseen lukion geometriaankaan, miten sitten yläkoulun?

Oikeita kysymyksiä ja korostuksia

Geometrian lisäksi Geogebra on hyvä työväline muihinkin matematiikan osa-alueisiin. Perinteinen esimerkki tästä on ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaajan tutkiminen. Tehdään liu’ut parametreille k ja b. Liu’uista pystyy muuttamaan parametrien arvoja. Sitten syötekenttään syötetään y=k*x+b. Muutetaan parametrien arvoja ja tutkitaan, miten kuvaajat muuttuvat. Tässä kohdin tulee olla tarkka, ettei liikettä tee vain liikkeen vuoksi. Helposti liu’usta parametrin arvoja muuttaa ees ja taas, ja tulkinta on: ”suora liikkuu”. Liike pitää pysäyttää, ja jollakin tavoin liittää oikeita kysymyksiä ja puhetta mukaan.

Geogebrassa kaikkien geometristen objektien algebralliset vastineet näkyvät algebra-ikkunassa. Sieltä jonkin yksittäisen asian muuttumista on kuitenkin turha tihrustaa. Mielenkiintoinen asia on nostettava esiin, esim. kirjoittamalla tekstiä geometria-ikkunaan. Jos opettaja esittää demon luokan edessä, kannattaa kaikkien tekstien koko muuttaa riittävän isoksi. Geogebralla pystyy tuottamaan tekstiä, jossa esim. esitetään kahden janan pituuden jakolasku. Tämä on kuitenkin suhteellisen hankalaa, enkä heti alkajaisiksi suosittele, myöhemmin kylläkin. Mallia voi ottaa esim. netistä löytyvistä sovelluksista. Toinen tapa korostaa tutkittavia arvoja on näyttää niitä laskentataulukossa. Siinäkin olevat arvot muuttuvat dynaamisesti, kun piirtoikkunassa objekteja muutetaan.



Geogebra lukiossa

Lukion matematiikassa voidaan tietenkin tehdä samoja asioita kuin yläkoulun puolella. Geometriassa ei niin paljoa uusia asioita lukion puolella tule. Ratkaiseva ero on kuitenkin kiire, ja omien kokemusteni perusteella oppilaiden omaksumat käsitykset siitä, että matematiikka on laskemista. Tutkiminen ja ihmettely ei ole sitä oikeata matematiikkaa, vaan oikea tehdään kynällä ja paperilla. Uudet työvälineet syvimmillään laittavat pohtimaan, mitä matematiikka on ja mitä on se matematiikka, jota koulussa tulisi opiskella. Vaikka kuvasta ei saisi suoraan vastauksia katsoa, auttavat kuvat ratkaisevasti ongelmissa eteenpäin.

Itse olen erityisesti lukion analyysissä käyttänyt Geogebraa. Tangentin kulmakertoimen avulla saa helposti derivaatan. Usein tuotan tutkittavan funktion esiin tekemällä aluksi funktion kuvaajasta vain yhden pisteen. Valitaan pisteen ominaisuudeksi ”Näytä jälki”. Liikuttamalla konstruktiota saadaan haluttu ilmiö esiin. Yksi esimerkki tästä on derivaattafunktion kuvaaja. Piirretään käyrältä piste P, ja piirretään tangentti pisteen kautta. Mitataan tangentin kulmakerroin. Tuotetaan derivaattafunktion kuvaajan yksi piste ottamalla x-koordinaatiksi pisteen P x-koordinaatti, ja y-koordinaatiksi kulmakertoimen arvo. Pisteen x-koordinaatin saa komennolla x(P). Liikuttamalla pistettä P saadaan derivaatta funktion kuvaaja.

Samalla tavalla voidaan tuottaa käänteisfunktion kuvaaja, tai ääriarvosovelluksissa tarvittavien funktioiden kuvaajia. Esimerkkinä jälkimmäisestä tehtävä, jossa halutaan selvittää, missä kohdassa paraabelin piste on lähinnä origoa. Piirretään paraabeli ja valitaan siltä mielivaltainen piste. Tehdään jana pisteestä origoon. Mitataan sen pituus. Tuotetaan jälleen piste, jonka x-koordinaattina on paraabelin pisteen x-koordinaatti ja y-koordinaattina janan pituus. Jos haluaisimme lyhyimmän pituuden vain jollakin tarkkuudella, niin olisimme jo perillä. Mutta kun tehtävänä on selvittää ratkaisu laskemalla, niin olemme vasta alussa. Tämän tyyppisen demon voi tuottaa hetkessä. Sen avulla pystymme havainnollistamaan, tuossa on se asia, jolle pitäisi funktion lauseke saada aikaiseksi.

Jos Geogebra kiinnostaa, niin lisää esimerkkejä löytyy vaikka osoitteista http://www.geogebra.org/cms/ ja http://geogebra.fi/.