Lukujen peilausta

Avainsanat: algoritmi, osoittaminen, jaollisuus

Luokkataso: 6-9, lukio

Välineet: kynä ja paperia

Tehtävä:

Valitse jokin kolminumeroinen luku, missä ensimmäinen ja viimeinen luku eivät ole samoja. Muodosta luvusta peilikuvaluku kääntämällä numeroiden järjestys, jolloin sinulla on kaksi lukua. Vähennä pienempi luku suuremmasta, jolloin saat uuden luvun. Muodosta taas peilikuvaluku kääntämällä numeroiden järjestys, mutta mikäli lukusi on kaksinumeroinen, lisää eteen nolla ennen kääntämistä (esim. 45 -> 045 -> 540). Laske nyt saadut numerot yhteen. Mitä saat tulokseksi? Kokeile menetelmää uudestaan eri luvuilla. Huomaat, että saat aina vastaukseksi saman nelinumeroisen luvun. Miksi näin käy?

Lisätehtävä:

Etsi kokonaisluku, jolla kertomalla edellisessä tehtävässä saamasi nelinumeroinen luku muuttuu peilikuvakseen.

On olemassa myös toinen nelinumeroinen luku, jolla on sama ominaisuus. Löydätkö sen? Vinkki: Tutki ensimmäisen luvun moninkertoja.

Ratkaisu:

Menetelmällä saadaan lopputulokseksi aina luku 1089. Osoitetaan seuraavaksi, miksi näin käy. Olkoon x luku väliltä $1-9$ sekä y ja z lukuja väliltä $0-9$ kuitenkin niin, että x ja z ovat eri lukuja. Tällöin kolminumeroinen luku voidaan kirjoittaa muodossa

$$x \cdot 100 + y \cdot 10 + z \cdot 1 = 100x + 10y + z.$$

Peilikuvaluku on tällöin muotoa

$$100z + 10y + x.$$

Oletetaan, että ensimmäinen luku on näistä suurempi, eli $x > z$, ja lasketaan erotus

$$\begin{aligned}&100x+10y+z-(100z+10y+x)\\&=100x+10y+z-100z-10y-x\\&=99x-99z\\&=99(x-z).\end{aligned}$$

Nähdään, että saatu luku on aina luvun 99 moninkerta. Koska $x>z$, niin luku $x-z$ on aina vähintään 1 ja korkeintaan 9. Mahdollisuudet saadulle luvulle $99(x-z)$ ovat siis

$$\begin{array}{lll}1\cdot 99=099, & 4\cdot 99=396, & 7\cdot 99=693,\\ 2\cdot 99=198, & 5\cdot 99=495, & 8\cdot 99=792,\\ 3\cdot 99=297, & 6\cdot 99=594, & 9\cdot 99=891.\end{array}$$

Lisätään lukuihin niiden peilikuvaluku (luku 99 pitää ajatella lukuna 099, jolloin peilikuvaksi tulee 990), jolloin saadaan

$$\begin{array}{lll}099+990=1089, & 396+693=1089, & 693+396=1089,\\ 198+891=1089, & 495+594=1089, & 792+297=1089,\\ 297+792=1089, & 594+495=1089, & 891+198=1089.\end{array}$$

Vastaavasti voidaan laskea myös tapaus, jossa alun luvuista toinen on suurempi, eli $z>x$.

Lisätehtävän ratkaisu:

Kerro luku 1089 luvulla 9, niin saat tulokseksi luvun 9801. Tutkitaan luvun 1089 moninkertoja:

$$\begin{array}{ll}1089\cdot 2=2178 & 1089\cdot 6=6534\\ 1089\cdot 3=3267 & 1089\cdot 7=7623\\ 1089\cdot 4=4356 & 1089\cdot 8=8712\\ 1089\cdot 5=5445 & 1089\cdot 9=9801\end{array}$$

Huomataan, että luvut 2178 ja 8712, luvut 3267 ja 7623 sekä luvut 4356 ja 6534 ovat toistensa peilikuvia. Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned}8712&=8\cdot 1089=8\cdot\frac{2178}{2}=4\cdot 2178\\ 7623&=7\cdot 1089=7\cdot\frac{3267}{3}=\frac{7}{3}\cdot 3267\\ 6534&=6\cdot 1089=6\cdot\frac{4356}{4}=\frac{6}{4}\cdot 4356.\end{aligned}$$

Näistä ainoa kokonaislukukerroin on tapauksessa $8712=4\cdot 2178$. 1089 ja 2178 ovat ainoa nelinumeroiset luvut, joilla on tämä ominaisuus.

Lukujen peilausta

Valitse jokin kolminumeroinen luku, missä ensimmäinen ja viimeinen luku eivät ole samoja. Muodosta luvusta peilikuvaluku kääntämällä numeroiden järjestys, jolloin sinulla on kaksi lukua. Vähennä pienempi luku suuremmasta, jolloin saat uuden luvun. Muodosta taas peilikuvaluku kääntämällä numeroiden järjestys, mutta mikäli lukusi on kaksinumeroinen, lisää eteen nolla ennen kääntämistä (esim. 45 -> 045 -> 540). Laske nyt saadut numerot yhteen. Mitä saat tulokseksi? Kokeile menetelmää uudestaan eri luvuilla. Huomaat, että saat aina vastaukseksi saman nelinumeroisen luvun. Miksi näin käy?

Lisätehtävä:

Etsi kokonaisluku, jolla kertomalla edellisessä tehtävässä saamasi nelinumeroinen luku muuttuu peilikuvakseen.

On olemassa myös toinen nelinumeroinen luku, jolla on sama ominaisuus. Löydätkö sen? Vinkki: Tutki ensimmäisen luvun moninkertoja.

Lukujen peilausta

Valitse jokin kolminumeroinen luku, missä ensimmäinen ja viimeinen luku eivät ole samoja. Muodosta luvusta peilikuvaluku kääntämällä numeroiden järjestys, jolloin sinulla on kaksi lukua. Vähennä pienempi luku suuremmasta, jolloin saat uuden luvun. Muodosta taas peilikuvaluku kääntämällä numeroiden järjestys, mutta mikäli lukusi on kaksinumeroinen, lisää eteen nolla ennen kääntämistä (esim. 45 -> 045 -> 540). Laske nyt saadut numerot yhteen. Mitä saat tulokseksi? Kokeile menetelmää uudestaan eri luvuilla. Huomaat, että saat aina vastaukseksi saman nelinumeroisen luvun. Miksi näin käy?

Lisätehtävä:

Etsi kokonaisluku, jolla kertomalla edellisessä tehtävässä saamasi nelinumeroinen luku muuttuu peilikuvakseen.

On olemassa myös toinen nelinumeroinen luku, jolla on sama ominaisuus. Löydätkö sen? Vinkki: Tutki ensimmäisen luvun moninkertoja.

OuLUMA
Pohjois-Pohjanmaa Elinkeino-, liikenne- ja ympäristökeskus
Vipuvoimaa EU:lta 2007–2013
Euroopan unioni Euroopan sosiaalirahasto