

MIKÄ FUNKTIO?

Avainsanat: tilavuus, integraali

Luokkataso: MAA10

Välineet: Kynä ja paperia

Ohjeita opettajalle:

Tehtävä on käännetty [NRICH-sivustolta](#). Alkuperäinen tehtävä löytyy [täältä](#).

Tehtävä on hyvä ratkaista 2 – 3 hengen ryhmässä. Tehtävää tehdessä oppilaita on hyvä rohkaista keskustelemaan ongelmasta ääneen sekä perustelevaan vastauksensa. Oppilaita tulee kannustaa tarkkaan kirjoitettuun ja puhuttuun matemaattiseen kieleen. Keksivätkö oppilaat useita ratkaisuja? Miten he perustelevat vastauksensa? Tehtävä on haastava, joten oppilaille voi antaa useamman päivän aikaa ratkaista ongelma.

Tehtävä löytyy sivulta 2 ja vastaukset sivulta 3.

Tehtävä:

Konstruoi funktio $f(x)$, joka täyttää seuraavat ehdot:

- (1) Alkupiste on $(0, 0)$ ja päätepiste $(1, 1)$.
- (2) Kun se pyöriähtää x -akselin ympäri, se muodostaa kappaleen, jonka tilavuus on 1.

Vastaus:

Jos funktio $y = f(x)$ on integroitava, pyydetyt tilavuuden voi laskea seuraavasti:

$$V = \int_0^1 \pi y^2 dx$$

Kokeillaan helppoa ratkaisua, joka antaa suuntaviivoja minkä tyyppinen funktio voisi olla kyseessä. Kokeillaan funktiota $f(x) = x$, joka täyttää ainakin ehdon (1).

Tilavuus on $V = \int_0^1 \pi x^2 dx = \dots = \frac{\pi}{3} \approx 1,05$.

Huomataan, että kysytyn funktion tulee kaartua hieman alaspäin verrattuna funktioon $f(x) = x$. Huomataan myös, että funktiot, jotka toteuttavat ehdon (1) ovat yleisesti muotoa $f(x) = x^a$, jossa $a = \text{vakio}$.

Selvitetään vakion a arvo: $V = \int_0^1 \pi(x^a)^2 dx = \dots = \frac{\pi}{2a+1}$. Ehdosta (2) saadaan relaatio

$\frac{\pi}{2a+1} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi-1}{2}$, joten kysytty funktio on

$$f(x) = x^{\frac{\pi-1}{2}}.$$

Huom! Voidaan löytää muitakin ehdot täyttäviä funktioita.