## PULLISTUNEEN NELIÖN PINTA-ALA

**Avainsanat:** analyyttinen geometria, ympyrä, integraali

**Luokkataso:** MAA4, MAA10

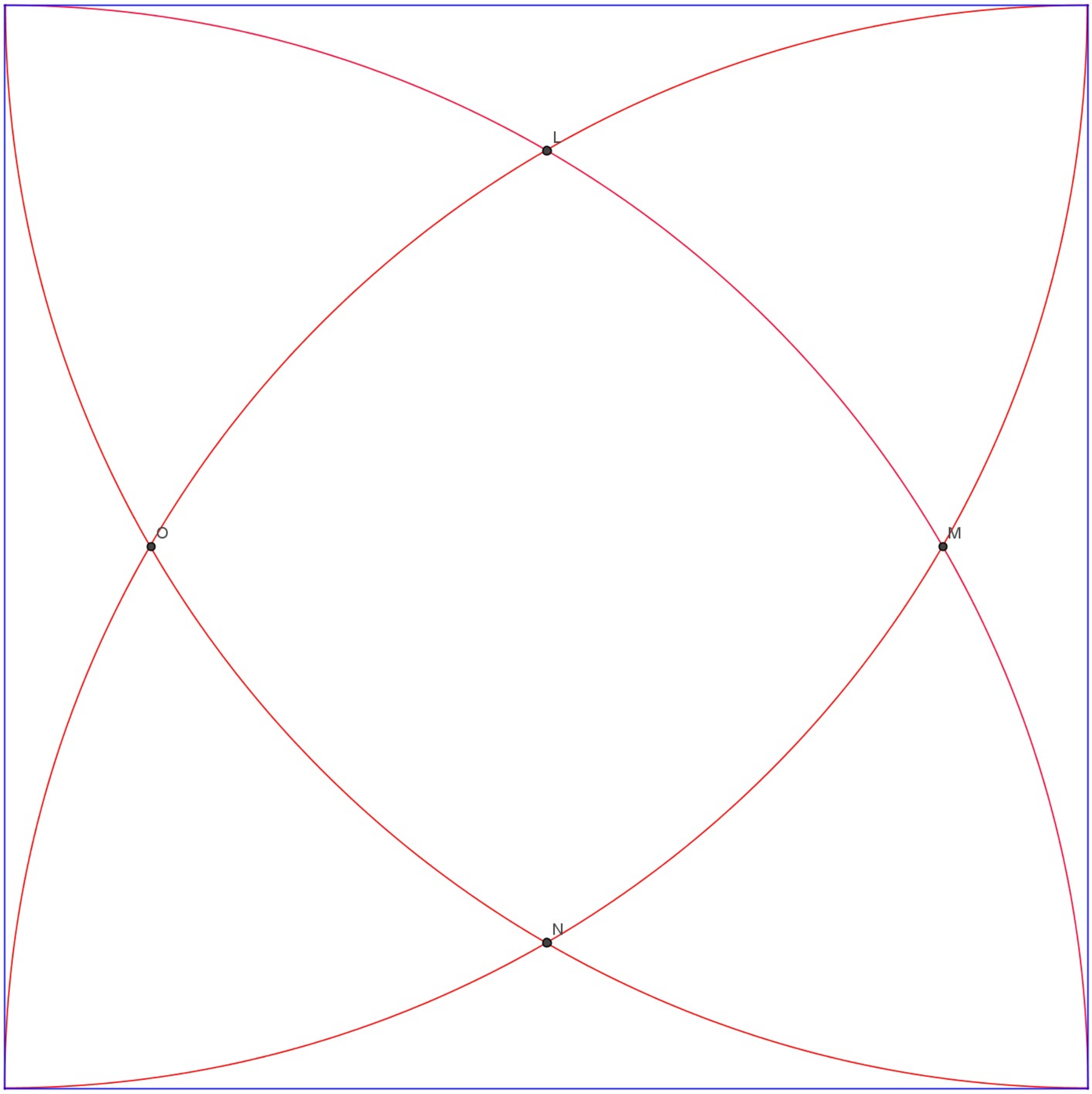
**Välineet:** Kynä ja paperia

**Ohjeita opettajalle:**
Tehtävä on käännetty NRICH-sivustolta. Alkuperäinen tehtävä löytyy täältä.

Tehtävä on hyvä ratkaista 2 – 3 hengen ryhmässä. Tehtävää tehdessä oppilaita on hyvä rohkaista keskustelemaan ongelmasta ääneen sekä perustelemaan vastauksensa. Oppilaita tulee kannustaa tarkkaan kirjoitettuun ja puhuttuun matemaattiseen kieleen. Keksivätkö oppilaat lisää vastaavia tehtäviä kuviosta? Voiko tehtävän ratkaista usealla eri tavalla?

Tehtävä löytyy sivulta 2 ja vastaukset sivuilta 3 – 4.

**Tehtävä:**




Yllä olevan sinisen neliön sivun pituus on 1. Punaiset kaaret ovat sinisen neliön kulmista piirrettyjen ympyröiden (säde 1) neljäsosa kaaria. Kaaret ja niiden leikkauspisteet (L, M, N, O) rajaavat alueen LMNO, jonka muoto on ”pulloittava neliö”.

a) Mikä on suurin neliö, joka mahtuu kokonaan tämän ”pulloittavan neliön” sisään? Onko se hyvä arvio ”pulloittavan neliön” pinta-alalle?
b) Mikä on ”pulloittavan neliön” tarkka pinta-ala? Löydätkö useita tapoja laskea pinta-alan?

**Vastaukset:**

a) Suurin neliö saadaan, kun yhdistetään pisteet LMNO neliöksi. Ajatellaan, että sinisen neliön vasen alakulma on koordinaatiston origossa. Tällöin pisteen L *x*-koordinaatti on symmetrian perusteella $\frac{1}{2}$. Koska origokeskeisen ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = 1$, saadaan pisteen L *y*-koordinaatti yhtälöstä:

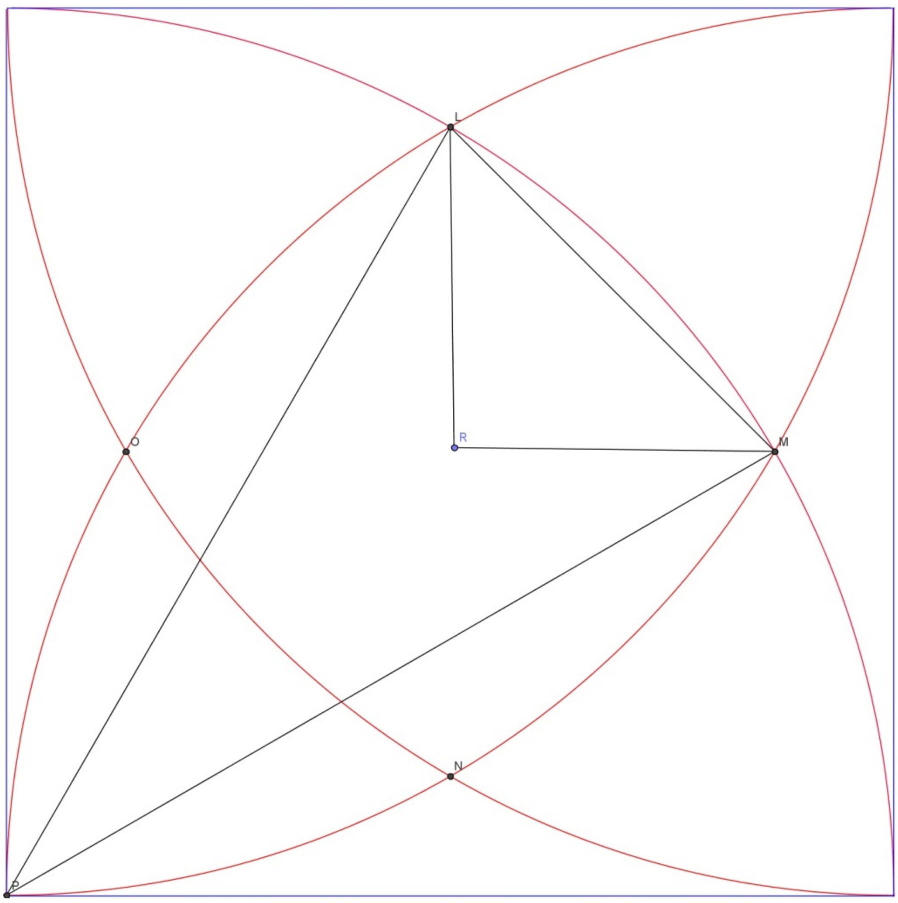
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$
$$y^2 = \frac{3}{4}$$
$$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tässä tapauksessa vain positiivinen tapaus on merkityksellinen. Niinpä pisteen $L = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Vastaavalla tavalla saadaan piste $M = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Janan NM pituus on $NM = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, joten neliön LMNO pinta-ala on $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \cdots = 2 - \sqrt{3}$.

b) Tapa 1:




Piirretään pisteet P ja R yllä olevan kuvan mukaisesti niin että muodostuu suorakulmainen kolmio LMR. Sektorin LPM kulma on $30°$ (useita tapoja laskea). Täten sektorin pinta-ala on $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$ osaa koko ympyrän ($A = \pi$) alasta eli $\frac{\pi}{12}$.

Huomataan, että kolmiot LPR ja RPM ovat identtiset. Lasketaan niistä toisen pinta-ala. Janan LR pituus on $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Kolmion LPR korkeus janaan LR nähden on $\frac{1}{2}$. Näin kolmion LPR pinta-ala on $\frac{\sqrt{3}-1}{8}$. Kolmioiden LPR ja RPM yhteispinta-ala on $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

Vähentämällä edellä mainittujen kolmioiden pinta-alat sektorin LPM pinta-alasta, saadaan neljäsosa ”pullistuneen neliön” pinta-alasta. Kun kerrotaan se neljällä, saadaan ”pullistuneen neliön” pinta-ala.

Kysytyn alueen pinta-ala on $4\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1$.

Tapa 2:
Origokeskeisen ympyrän yhtälö on $x^2+y^2=1$. Ratkaistaan tästä $y=\sqrt{1-x^2}$.
Neljäsosa ”pullistuneen neliön” pinta-alasta saadaan, kun integroidaan funktio $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ alarajana $\frac{1}{2}$ ja ylärajana $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sekä vähennetään tästä suorakulmion, jonka kaksi ylintä pistettä ovat R ja M, pinta-ala.

Eli

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin t)^2 dt = \cdots = \frac{\pi}{12}$$

Vähennetään siitä suorakulmion pinta-ala:

$$\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

Kerrotaan tulos neljällä ja saadaan ”pullistuneen neliön” pinta-ala:

$$4\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}-1$$