Wythoffin peli

Hollantilainen matemaatikko Willem Abraham Wythoff (hollantilainen muoto Wijthoff, 1865–1939) analysoi nimeään kantavaa peliä vuonna 1907 *Nieuw Archief voor wiskunde*-lehden artikkelissa. Vastaava peli tunnettiin jo aiemmin kiinassa nimellä *tsyan-shidzi* (choosing stones, kivien valinta). Tasaisten monitahokkaiden yhteydessä esiintyy termi Wythoffin symboli, millä kuvataan tasaisen monitahokkaan olemusta. Myös pallopinnan tiilitykseen liittyvä Wythoffin kaleidoskooppinen konstruktio-termi voi tulla vastaan. Nimityksissä on kyseessä sama herra, kuin on tarinamme pelin takana.

Wythoffin peli on Nim-pelin tyyppinen, peli esiintyykin toisinaan muodossa Wythoff's nim. Pelissä on kaksi joukkoa pelimerkkejä, esimerkiksi ympyröitä kahden suorakaiteen sisällä, kiekkoja kahdessa tangossa, keksejä kahdessa paketissa jne. Pelissä poistetaan merkkejä ottamalla joko mielivaltainen määrä merkkejä pois toisesta joukosta tai ottamalla yhtä monta pelimerkkiä kummastakin joukosta. Pelaajat ottavat vuorotellen merkkejä pois esimerkiksi rastittamalla poistettavat ympyrät, vähintään yksi merkki on poistettava. Se pelaaja voittaa, joka ottaa viimeisen merkin. Pelin yksi lukuisista nettiversioista löytyy esimerkiksi hakusanoilla Last Biscuit.

Pelissä on sellaisia lukupareja, ns. turvallisia pareja, joihin pelaajan kannattaa pyrkiä. Wythoffin pelin turvallisia pareja eli Wythoffin lukupareja ovat (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10),… Tällöin pelaaja, jonka jälkeen jää jokin em. tilanne, voi voittaa riippumatta vastapuolen seuraavasta siirrosta.

Esimerkiksi jos tilanne on (3, 5), niin mahdollisuudet poisotolle ovat (1, 0), (1, 1), (0, 1), (2, 0), (0, 2)[b], (2, 2), (3, 0)[a], (3, 3)[a], (0, 3), (0, 4) ja (0, 5)[a]. Vaihtoehdoissa a toinen joukko jää tyhjäksi, jolloin seuraava voi ottaa jäljellejääneen joukon tyhjäksi. Vaihtoehdossa b joukkoihin jää yhtä monta pelimerkkiä, jolloin seuraava pelaaja voi tyhjentää kummatkin joukot. Lopuissa vaihtoehdoissa seuraava pelaaja voi ottaa merkkejä pois siten, että päädytään tilanteeseen (1, 2) tai (2, 1), mikä on turvallinen lukupari.

Pelistä on kehitetty myös shakkilaudalla pelattava versio, missä yksittäinen laudalle asetettu pelinappula voi liikkua mielivaltaisen matkan vasempaan vaakasuunnassa tai alaspäin pystysuunnassa tai vasemmalle alaviistoon diagonaalisuunnassa. Pelaajat siirtävät nappulaa vuorotellen, pelin voittaa se, joka saa nappulan ensimmäisenä vasempaan alakulmaan.

Wythoffin lukuparit ja lattiafunktio

Turvalliset lukuparit voidaan määrittää lattiafunktion (engl. floor) avulla. Lattiafunktion arvo luvulla x on suurin kokonaisluku, joka ei ole suurempi kuin x. Jos luku on positiivinen, lattiafunktio on siten sama kuin kokonaisosafunktio. Lattiafunktiolle käytetään merkintää $\lfloor x \rfloor$. Esimerkiksi $\lfloor 4{,}78 \rfloor = 4$, $\lfloor \mathrm{e} \rfloor = 2$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ ja $\lfloor 5 \rfloor = 5$. Turvalliset lukuparit (A_r, B_r) saadaan $\left(\lfloor \Phi r \rfloor, \lfloor \Phi r \rfloor + r\right)$, kun $r = 1, 2, 3, \ldots$ ja Φ on kultainen leikkaus. Koska $\Phi r + r = \Phi^2 r$, lukuparit saadaan myös $\left(\lfloor \Phi r \rfloor, \lfloor \Phi^2 r \rfloor\right)$.

Taulukko 1. Wythoffin pelin turvallisia pareja.

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A_r	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21
B_r	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34

Taulukossa keltaisissa soluissa olevat luvut ovat Fibonaccin lukujonon lukuja, eli
$A_1, B_1, A_{B_1}, B_{B_1}, A_{B_{B_1}}, B_{B_{B_1}}, \ldots$=1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

Samalla tavalla, jos aloitetaan vaikka luvuista 4 ja 7, saamme vastaavasti yleisen Fibonaccin jonon, jossa aloitetaan luvuilla 4 ja 7:
$A_3, B_3, A_{B_3}, B_{B_3}, A_{B_{B_3}}, B_{B_{B_3}}, \ldots$=4, 7, 11, 18, 29, 37, … eli nämä ovat Lucasin lukuja.

Beattyn jonot

Turvallisten parien taulukosta löytyy kaikki luonnolliset luvut kertaalleen, toisin sanoen yksikään luku ei toistu taulukossa ja kaikki luonnolliset luvut löytyvät luettelosta. Tämä on yksi esimerkki sellaisista Beattyn jonoista A ja B, jotka sisältävät kaikki luonnolliset luvut.

Beattyn jonot määritellään lattiafunktion sekä positiivisten irrationaalilukujen α ja β avulla siten, että $A = \lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \ldots$ ja $B = \lfloor \beta \rfloor, \lfloor 2\beta \rfloor, \lfloor 3\beta \rfloor, \ldots$

Jos irrationaaliluvut α ja β toteuttavat yhtälön
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$
niin jonot A ja B sisältävät kaikki luonnolliset luvut ilman toistoa.

Samuel Beatty (1881-1970) julkaisi vuonna 1926 American Mathematical Monthly-lehdessä ongelman liittyen edellä mainittuihin, hänen nimeään kantaviin jonoihin. Beatty oli ensimmäinen Kanadalaisesta yliopistosta valmistunut matematiikan alan tohtori. Hänen väitöskirjaansa ohjasi J. C. Fields (1863-1932), jonka kunniaksi on nimetty ”matemaatikkojen Nobel”, eli Fieldsin mitali. Fieldsin mitalista mainittakoon, että ensimmäiset Fieldsin mitalit saivat suomalainen Lars Ahlfors (1907-1996) ja Yhdysvaltalainen Jesse Douglas (1897-1965) vuonna 1936.

Tehtäviä

1. Osoita ilman laskinta, että

$$\frac{1}{\Phi}+\frac{1}{\Phi^2}=1,$$

missä $\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Ratkaise yhtälö

$$\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{x}=1.$$

3. Samuel Beatty on osoittanut, että jos kaksi positiivista irrationaalilukua α ja β toteuttavat yhtälön

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$, niin lukuparit $\{\lfloor n\alpha\rfloor, \lfloor n\beta\rfloor\}$ sisältävät kaikki luonnolliset luvut, kun *n*=1, 2, 3, …
Näiden lukuparien muodostamia jonoja kutsutaan Beattyn jonoiksi.

Merkintä $\lfloor x\rfloor$ tarkoittaa lattiafunktiota, eli suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin *x*. Esimerkiksi $\lfloor 5{,}3\rfloor=5$, $\lfloor -\pi\rfloor=-4$ ja $\lfloor 4\rfloor=4$.

Kokeile minkälaiset Beattyn jonot saat aikaan tehtävien 1 ja 2 lukupareilla. Tee tutkimuksesi esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmalla.

4. Tee oma Beattyn lukujonosi keksimällä luvuille α ja β sopivat arvot.