

1.2 Mikä on yhtälön ratkaisu?

Tunnin rakenne:

- Kotitehtävät ja edellisen kertaus (n. 10 min)
- Tehtävä 1 (20 min)
- Mitä tarkoittaa yhtälön ratkaisu, Esimerkki 1, Tehtävä 2 (10 min)
- Tehtävä 3 ja loppuyhteenvedo (5min)

Tunnin tavoitteet

- Opitaan selvittämään, onko yhtälö tosi vai epätosi tietyllä muuttujan arvolla.
- Yhtälön ratkaisun määritelmän ymmärtäminen.
- Luodaan tarve muunnoksille.

Toimintaohje: Tunnilla työskennellään ryhmässä (tehtävä 1), pohditaan yhtälön totuusarvoa ja määritellään yhtälön ratkaisu. Tunnin loppuksi (erityisesti tehtävä 3 c) luodaan tarvetta saada työkaluja (muunnokset) yhtälön helpottamiseksi.

Tehtävä 1 Tutki laskemalla, ovatko taulukon yhtälöt tosia vai epätosia annetuilla muuttujan arvoilla. Mitä huomaat taulukosta?

		$x = 2$	$x = 5$	$x = -1$	$x = 3$	$x = 7$	$x = \frac{1}{2}$	$x =$
A	$x + 2 = 7$	E	T	E	E	E	E	
B	$x + 1 = x$	E	E	E	E	E	E	
C	$x - 5 = 2x - x - 5$	T	T	T	T	T	T	
D	$10 - x = 3$	E	E	E	E	T	E	
E	$1 + x$	3	6	0	4	8	$\frac{3}{2}$	
F	$5x - 3 = 2x + 3$	T	E	E	E	E	E	
G	$x^2 + 6 = 5x$	T	E	E	T	E	E	

Tehtävän 1 toteutus:

- Opettaja jakaa kullekin ryhmälle 2-3 saraketta (muuttujan arvoa). Ryhmät käyvät täydentämässä opettajan tyhjää taulukkoa edessä kirjoittaen TOSI/EPÄTOSI. Ajatuksena on, että joillain ryhmillä on samat arvot.
- Esimerkiksi jokaiselle ryhmälle voi antaa "vastuusarakkeen", jonka käyvät edessä täyttämässä ja "tarkistusarakkeen", jonka tarkistavat toisen ryhmän täytettyä sen.

Huomautus!

- Oppilailla on taulukossa enemmän vastaustilaa väitteen perustelulle.
- Nopealle ryhmälle voi antaa uuden muuttujan arvon esim. $x = 1$, joka tuo kiinnostavan näkökulman yhtälöön (G).

Tehtävän 1 koonti: Mitä havaitsitte?

- Kootaan havainnot taulukosta yhdessä keskustellen lävitse. Ovatko ryhmät samaa mieltä toistensa täyttämistä sarakkeista? Miksi?
- Matemaattinen idea **A- G** kohtien taustalla:
 - o **A, D** ja **F** ovat tosia tasan yhdellä muuttujan arvolla.
 - o **B** ei ole tosi millään muuttujan arvolla. (Sievennyksellä yhtälön saa muotoon $1 = 0$.)
 - o **C** on tosi kaikilla muuttujan arvoilla. (Sievennyksellä yhtälön saa muotoon $x - 5 = x - 5$.)
 - o **E** on lauseke, josta sijoituksen jälkeen saadaan laskettua lausekkeen arvo, eikä totuusarvoa.
 - o **G** on tosi kahdella muuttujan arvolla kun $x = 2$ tai $x = 3$ (Lisätieto: toisen asteen yhtälö).

Lisätieto: Jos oppilaille on koordinaatisto tuttu, niin tehtävän ideaa voi havainnollistaa kolmen ensimmäisen yhtälön ja PAN BALANCE – sivun (<http://illuminations.nctm.org/activity.aspx?id=3529>) avulla ja samalla pohjustaa funktiokäsitettä (vaikka itse funktio-sanaa ei kannata mainita).

Uusi käsite (Yhtälön ratkaisu)

Yhtälön ratkaisu tarkoittaa lukua, joka sijoitettuna muuttujan paikalle tekee yhtälöstä toden eli toteuttaa yhtälön.

Vaihtoehtoisesti: Yhtälön ratkaisulla tarkoitetaan muuttujan arvoa, joka sijoitettaessa yhtälöön toteuttaa ehdon, että yhtälön vasen ja oikea puoli saavat saman arvon eli yhtälö on tosi.

Huomioita:

- Tällä kurssilla tutkitaan pääosin yhtälöitä, joilla on vain yksi ratkaisu. Hyvä on kuitenkin ymmärtää, että yhtälöllä voi olla ratkaisuja nollasta rajattomaan määrään ratkaisuja (Vertaa Tehtävä 1 kohdat B, C, G).
- Jatkossa ollaan erityisesti kiinnostuneita siitä, milloin yhtälö on tosi (eli yhtälön ratkaisusta). Tosielämän ongelmissa halutaan tietää, milloin tietyt ehdot ovat voimassa. (Näytä tosielämän yhtälö esim. tuotteen hinnan määrääminen, voiton maksimoimiseksi tai tarvittavan materiaalin määrä uuden talon harjakattoa varten.)

Lisätieto: Oppilaille voi näyttää joitakin tärkeitä yhtälöitä: <http://www.businessinsider.com/the-17-equations-that-changed-the->

Esimerkki 1 Onko muuttujan arvo $x = 3$ yhtälön ratkaisu, kun yhtälö on

a) $11 = 5 + 2x$

b) $5x + 5 = 3x - 8$

Tutkitaan yhdessä opettajan kanssa.

a) Kyllä on, koska oikean puolen arvoksi saadaan laskettua $2 \cdot 3 + 5 = 11$, joka on yhtä suuri yhtälön vasemman puolen kanssa.

b) Ei ole, koska vasemman puolen arvoksi voidaan laskea $5 \cdot 3 + 5 = 20$ ja oikean puolen arvoksi $3 \cdot 3 - 8 = 1$, jotka eivät ole yhtä suuret, eli muuttujan arvo 3 ei ole b) yhtälön ratkaisu.

Tehtävä 2 Mitkä seuraavista vaihtoehtoista ovat tai eivät ole yhtälön $2x - 6 = x - 8$ ratkaisuja?

a) $x = 3$ b) $x = -2$ c) $s = 1$ d) $x = \frac{1}{2}$

Vastaus: $x = -2$ on yhtälön $2x - 6 = x - 8$ ratkaisu. Sijoittaessa tämä muuttujan arvo yhtälöön saadaan vasemmalle puolelle $2 \cdot (-2) - 6 = -4 - 6 = -10$ ja oikealle puolelle $-2 - 8 = -10$. Yhtälön vasen ja oikea puoli saavat siis saman arvon.

a) ja d) kohdan arvot muuttujalle eivät toteuta yhtälöä eli vasemmasta ja oikeasta puolesta yhtälössä ei tule yhtä suuria sijoituksen jälkeen.

c) ei kelpaa ratkaisuksi yhtälölle, koska tässä annetaan arvo muuttujalle, jota ei edes yhtälössä esiinny.

Tehtävä 3 Päättele yhtälön ratkaisu

Huomautus!

- Kootaan opettajan johdolla.
- Viimeisen kohdan tarkoituksena on luoda tarve apuvälineille (muunnoksille), joilla yhtälöt saadaan muunnettua helpompaan muotoon. Arkielämän ongelmista muodostuu yleensä vaikeita yhtälöitä, joista on vaikea päätellä ratkaisua.

a) $2p = 6$

b) $4x = 2 + 2x$

c) $4x + 2 = 9 - x$

a) $p = 3$

b) $x = 1$

c) $x = \frac{7}{5}$

Jokeri 4 Onko yhtälö tosi vai epätosi, muuttujan arvolla -4 ?

a) $3x + 8 = -2x - 4$

b) $-5b + 6 = 3b + 38$

Vasen puoli: $3 \cdot (-4) + 8 = -12 + 8 = -4$

Vasen puoli: $-5 \cdot (-4) + 6 = 20 + 6 = 26$

Oikea puoli: $-2 \cdot (-4) - 4 = 8 - 4 = 4$

Oikea puoli: $3 \cdot (-4) + 38 = -12 + 38 = 26$

Yhtälön vasen ja oikea puoli eivät ole yhtä suuret.

Vastaus: Yhtälö on epätosi, kun $x = -4$.

Vastaus: Yhtälö on tosi, kun $b = -4$.

Jokeri 5 Millä muuttujan k arvolla yhtälön ratkaisu on $x = 3$?

a) $2x + k = 8$

Vasen puoli: $2 \cdot 3 + k = 6 + k$

Oikea puoli: 8

Vastaus: muuttujan k arvo on oltava 2 ,
jotta oikean ja vasemman puolen arvoksi tulee 8 .

b) $k - 3x = 7$

Vasen puoli: $k - 3 \cdot 3 = k - 9$

Oikea puoli: 7

Vastaus: muuttujan k arvo on oltava 16 ,
jotta oikean ja vasemman puolen arvoksi tulee 7 .

c) $x + 2k = k - 9$

$3 + 2k = k - 9$

$3 - 3 + 2k = k - 9 - 3$

$2k - k = k - k - 12$

$k = -12$

Vastaus: muuttujan k arvo on -12 .

d) $6x - k = 9 - 2$

Vasen puoli: $6 \cdot 3 - k = 18 - k$

Oikea puoli: $9 - 2 = 7$

Vastaus: muuttujan k arvo on oltava 11 ,
jotta oikean ja vasemman puolen arvoksi tulee 7 .

OPPITUNNIN KOONTI: "Selittäkää ryhmässä toisillenne omin sanoin mikä on yhtälön ratkaisu ja antakaa esimerkki." (1min) Sitten pyydetään jotakuta selittämään koko luokalle ja testataan ymmärretäänkö asia samalla tavalla. (2min) Lopuksi pohditaan ryhmissä vielä 1min Tehtävää 3c, jonka jälkeen "Mikä on yhtälön ratkaisu?" ...hiljaisuus. "No, eipä opettajakaan kyllä kieltämättä osaa ratkaista tätä päässä ilman apuvälineitä. Me tarvitaan joku keino, miten yhtälöt saadaan muunnettua helpompaan muotoon!"

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1 Kertaa (ei tarvitse kirjoittaa), mitä ovat

a) yhtälö

b) yhtälön ratkaisu.

Opettajalle muistutuksena:

a) Yhtälö on kahden lausekkeen merkitty yhtäsuuruus, esimerkiksi $x+x=5-1$ on yhtälö.

b) Yhtälön ratkaisu on muuttujan arvo, joka toteuttaa yhtälön. Toisin sanoen arvon sijoittamisen jälkeen yhtälön vasen ja oikea puoli ovat arvoltaan yhtä suuret.

Kotitehtävä 2 Yhtälö on $5x - 6 = 3 + x$. Vastaa seuraaviin kysymyksiin ja perustele vastauksesi.

a) Onko yhtälö tosi, kun $x = 2$?

Vasen puoli: $5 \cdot 2 - 6 = 10 - 6 = 4$

Oikea puoli: $3 + 2 = 5$

eli luku 2 ei ole yhtälön $5x - 6 = 3 + x$ ratkaisu.

b) Onko muuttujan arvo 3 yhtälön ratkaisu?

Vasen puoli: $5 \cdot 3 - 6 = 15 - 6 = 9$

Oikea puoli: $3 + 3 = 6$

eli luku 3 ei ole yhtälön $5x - 6 = 3 + x$ ratkaisu.

Kotitehtävä 3 Osoita, että luku 4 on seuraavien yhtälöiden ratkaisu:

a) $3x + 1 = 13$

Vasen puoli: $3 \cdot 4 + 1 = 12 + 1 = 13$

Oikea puoli: 13

eli luku 4 on yhtälön $3x + 1 = 13$ ratkaisu

b) $\frac{x}{2} - 14 = 9x - 48$.

Vasen puoli: $\frac{4}{2} - 14 = 2 - 14 = -12$

Oikea puoli: $9 \cdot 4 - 48 = 36 - 48 = -12$

eli luku 4 on yhtälön $\frac{x}{2} - 14 = 9x - 48$ ratkaisu.

Itsearviointi (täytetään yksin aina luvun päätteeksi)

EOS = En osaa sanoa

1=Erittäin heikosti

7=Erinomaisesti

Miten hyvin osaat seuraavat asiat

- | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| • Lausekkeen ja yhtälön ero | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Yhtälön tasapaino | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Tutkia, onko yhtälö tosi/epätosi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Olen oppinut tunneilla käsitellyt asiat. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin keskittymään perusteluihin vastausten sijaan. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin löytämään ja esittämään kysymyksiä. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin kuvailemaan ajatteluani muille. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |
| • Onnistuin hyödyntämään virheitä oppiakseni. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | EOS |