Luku 2 Muunnoksiin tutustuminen

Opettajalle tietoa luvusta 2

Tämän luvun tavoitteena on auttaa oppilaita hahmottamaan yhtälönratkaisun ydin eli se, että muunnoksia ovat mitkä tahansa tavat muuttaa yhtälöä, siten että uusi yhtälö on edelleen tosi juuri samalla muuttujan arvolla. Muunnosten ymmärtäminen antaa oppilaille vapauden tutkia yhtälönratkaisua. Tällöin rutiineja ja mekaanista ulkoa opettelua ei tarvita niin paljon. Muunnoksien avulla löydetään muuttujalle arvo, jolla yhtälö ratkeaa. Lopuksi saadaan yksinkertainen yhtälö, josta nähdään milloin se on tosi.

Yhtälöitä lähestytään kokonaisuutta hahmottaen esittelemällä muunnoksia (lisääminen, vähentäminen, kertominen, jakaminen, muokkaaminen) kerralla sen sijaan, että ne pilkottaisiin yksittäisiin tapauksiin, jotka hetkeksi jäävät mieleen toistamalla niitä yhden oppitunnin ajan. Jos oppilaista tuntuu haastavalta nähdä erilaisia yhtälöitä kerralla, voi kertoa että asian ymmärtämiselle on varattu aikaa useita oppitunteja.

Vaakamallin avulla yhtälön totuusarvoa verrataan tasapainoon. Vaakamallia käytetään vain yhdellä oppitunnilla, mutta oppilaita voi tarvittaessa kehottaa palaamaan tähän mielikuvaan myöhemminkin. Eri esitysmuotojen (vaakamalli, matemaattinen, sanallinen ja lyhennys) kuljettaminen rinnakkain syventää ja monipuolistaa oppimista. Yleinen käsitys yhtälönratkaisusta on, että on kokoelma erilaisia temppuja joita tehdään allekkain tietyissä tilanteissa ja seurauksena saadaan alimmaiseksi yhtälön ratkaisu.

Kappaleen 2.1. voi toteuttaa joko tutkimuksellisella otteella (2.1.a)) tai vaakamallin avulla (2.1.b)).
Kappaleessa 2.1.b) muunnokset esitellään vajaiden esimerkkien (ei laskettu loppuun) avulla, jotta päähuomio kiinnittyy itse muunnoksiin. Muunnoksista käytetään lyhenteitä esim. V8 tarkoittamaan, että vähennetään puolittain 8. Tässä korostuu sanallistamisen ja laskutoimituksen yhteys. **Lausekkeen muokkaaminen on luokiteltu yhdeksi muunnokseksi (M), joka sisältää kaikki aiemmin opitut keinot lausekkeiden muokkaamiseen.**

Kappaleessa 2.2. syvennetään muunnosten ymmärtämistä, täydennetään ja analysoidaan tehtäviä. Kappaleessa nähdään, miten yhtälö saadaan ratkaistua.

Kappaleessa 2.3. virheen sisältävissä esimerkkipareissa oppilaat saavat toimia opettajana virheitä etsien, tutkien muunnoksia ja selittäen auki, miten asia olisi pitänyt tehdä. **Tarkoituksellisten virheiden käytöllä on tutkittu olevan positiivisia vaikutuksia matematiikan (käsitteelliselle) osaamiselle erityisesti esitettäessä niitä oikeiden ratkaisutapojen rinnalla.** Oppilaat pääsevät näkemään tyypillisiä virheitä jo ennen kuin itse ratkaisevat yhtälöitä alusta loppuun, millä voisi olettaa olevan virheitä ennakoiva vaikutus. Virheiden näkeminen auttaa hyväksymään virheet luonnollisena osana oppimista.

HUOM. Kappale 2.1. käydään joko lähestymistavalla a tai b.

2.1 a) Muunnokset ja vaakamalli

Esimerkki 1. Huomautus! Tämän esimerkin pohtimiseen voi halutessaan käyttää reilummin aikaa, sillä uudet käsitteet on sen idean avauduttua mahdollista käydä lyhyesti läpi.
Esimerkin 1 koonti:

- Oppilaat pohtivat hetken ryhmissä ennen esimerkin läpikäyntiä opettajan johdolla.
- **Apukysymyksiä**
    - Mitä yhteistä näissä yhtälöissä on?
    - Voiko jonkun laskutoimituksen molemmilla puolilla tekemällä muokata jonkun näistä yhtälöistä toiseksi? (johdattelu muunnoksiin)

Lisäväite: Tekemällä saman laskutoimituksen yhtälön molemmille puolille, yhtälön ratkaisu muuttuu.
Väite ei pidä paikkaansa yleensä. Yhtälön ratkaisu ei muutu, jos molemmille puolille tehdään sama laskutoimitus. Ainoa poikkeus on, jos kertoo nollalla.

Esimerkki 1 Tarkastellaan seuraavia yhtälöitä.

$y + 2y = 3$	$\frac{y}{10} = \frac{1}{2}$	$3y = 3$	$3y - 4 = -1$
$2y = 10$	$3y + 2 = 5$	$2y = 5 \cdot 2$	$y = 5$

a) Millä näistä yhtälöistä on sama ratkaisu?
b) Mitä laskutoimituksia tekemällä yhtälö saadaan muutettua toiseksi yhtälöksi, jolla on sama ratkaisu?
c) Kirjoita taululle keksimäsi yhtälö, jolla on sama ratkaisu kuin joillain laatikon yhtälöistä.

Ratkaisu: a) Kaikilla seuraavilla yhtälöillä on sama ratkaisu, joka yksinkertaisimmassa muodossaan on $y = 5$.

$y = 5$ $\quad$ $2y = 5 \cdot 2$ $\quad$ $2y = 10$ $\quad$ $\frac{y}{10} = \frac{1}{2}$

Seuraavilla on sama ratkaisu, joka yksinkertaisimmassa muodossaan on $y = 1$:

$3y = 3$ $\quad$ $y + 2y = 3$ $\quad$ $3y + 2 = 5$ $\quad$ $3y - 4 = -1$

b) Voidaan muokata yhtälön eri puolia (esim. $5 \cdot 2 = 10$ ja $y + 2y = 3y$). Yhtälöt voidaan muuttaa toisikseen kertomalla tai jakamalla yhtälön molempia puolia samalla luvulla tai lisäämällä ja vähentämällä sama luku.

c) Esim. $9y = 9$ ja $y + 3 = 8$

Esimerkki 2 (Yhteenveto muunnoksista)

Muunnos on sellainen tapa muuttaa yhtälöä, että yhtälön tasapaino/ totuusarvo / ratkaisu säilyy samana kuin alkuperäisen. Toisin sanoen uusi yhtälö on tosi samalla muuttujan arvolla kuin alkuperäinen.

Huom! Esimerkiksi luvun lisääminen vain toiselle puolelle ei ole muunnos, koska ratkaisu muuttuu.

MUUNNOKSIA

Muunnos **L**: saman termin lisääminen yhtälön molemmille puolille.

Muunnos **V**: saman termin ____________________________ yhtälön molemmilta puolilta.

Muunnos **J:** molempien puolien ___________________________ samalla nollasta eroavalla luvulla.

Muunnos **K:** molempien puolien ____________________________ samalla nollasta eroavalla luvulla.

Muunnos **M:** Yhtälössä olevan lausekkeen _____________________________.

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme	
Keskustelimme toisemme huomioiden	
Toistimme asioita tarvittaessa	
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan	
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme	

Kotitehtävä: Katso animaatio: https://ouluma.fi/wp-content/uploads/2016/11/yhtalo1-1.gif