

2.2 Muunnosten käyttöön tutustumista

Tunnin rakenne:

- Esimerkki 1 (15min)
- Tehtävä 1-5, jokerit tarvittaessa (25 min)
- Loppukoonti ja ryhmäarviointi (5 min)

Tunnin tavoitteet:

- Analysoidaan ja pohditaan valmiiksi annettuja ratkaisuja ja ratkaisupareja.
- Hahmotellaan yhtälönratkaisua prosessina, mutta ei vielä ratkaista yhtälöitä itsenäisesti.
- Ymmärtää, että yhtälönratkaisussa pyritään saamaan yhtälö mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon, josta näkyy ratkaisu (esim. $t = 3$).

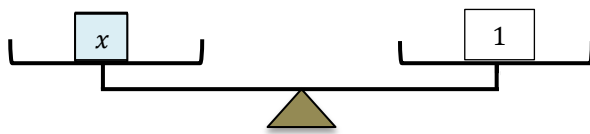
Esimerkki 1 Tutki kuinka muunnosten avulla voi selvittää haastavan yhtälön ratkaisun.

Esimerkin 1 tarkoituksena on tutkia yhtälön totuusarvoa, muunnosten vaikutusta sekä eri esitystapoja yhtälölle.

Opettajan on hyvä kiinnittää huomio siihen, että oppilaat huomaavat, että kaikissa vaiheissa on eri muodossa oleva yhtälö ja kaikilla näillä yhtälöillä on samat ratkaisut.

| | Vaakamalli | Matemaattinen esitys | Muunnos |
|---|------------|--|---------|
| 1 | | $-x + 7x + 8 = 15 - x$ $-1 + 7 \cdot 1 + 8 = 15 - 1$ $14 = 14$ | Lx M M |
| 2 | | $7x + 8 = 15$ $7 \cdot 1 + 8 = 15$ $15 = 15$ | V8 |
| 3 | | $7x + 8 - 8 = 15 - 8$ $7 \cdot 1 + 8 - 8 = 15 - 8$ $7 = 7$ | M M |
| 4 | | $7x = 7$ $7 \cdot 1 = 7$ $7 = 7$ | J7 M M |

5



$$\begin{aligned} x &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

- a) Täydennä puuttuvat välivaiheet vaakamalliin, matemaattiseen esitykseen ja muunnos sarakkeelle.
 b) Millä muuttujan arvolla viimeinen yhtälö (numero 5) on tosi? (Kun $x = 1$.) Sijoita tämä muuttujan arvo muihin yhtälöihin (1-4). Merkitse sijoitukset näkyviin matemaattisen esityksen alapuolelle. Mitä huomaat? **Yhtälöt 1-4 ovat tosia, kun muuttujan paikalle sijoittaa arvon 1. Toisin sanoen luku 1 on jokaisen (1-5) yhtälön ratkaisu.**
 c) Kerro lyhyesti mikä muuttuu tai säilyy, kun muunnoksia käytetään yhtälöön.

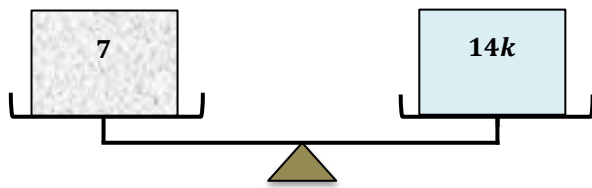
MUUTTUU**SÄILYY**

- Yhtälön ulkomuoto eli yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla olevat lausekkeet.

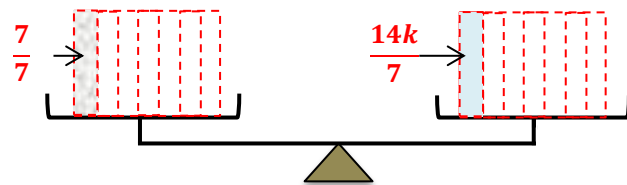
- a) Yhtälön ratkaisu: Jos yhtälö oli tosi (tietyllä muuttujan arvolla), niin se on edelleen tosi. Jos yhtälö oli epätosi, niin se on edelleen epätosi.

Tehtävä 1 Tee pyydetty muunnos yhtälölle ja kirjoita muunnoksen jälkeinen tilanne sekä vaakamallin että matemaattisen esityksen avulla.

| | Vaakamalli | Matemaattinen esitys | Muunnos |
|----|-------------------|--|----------------|
| a) | | $2x - 1 = 5$ $2x - 1 + 1 = 5 + 1$ | L1 |
| b) | | $2x - 1 = 5$ $2x = 6$ | L1 M M |
| c) | Vaakamalli | Matemaattinen esitys | Muunnos |



$$7 = 14k$$



$$\frac{7}{7} = \frac{14k}{7}$$

J14

Tehtävissä 3 ja 4 täydennetään yhtälöratkaisun vaiheita: matemaattinen esitys ja termi sanalliseen selitykseen.
Huom. Opettaja voi mainita, että muunnoksen voi joustavasti merkitä eri kohtaan muunnettavaa lauseketta.

Tehtävä 2

| Matemaattinen esitys | Muunnos | Sanallinen selitys |
|-----------------------------------|---------|---|
| $\frac{b}{9} - 11 = -8$ | L11 | Lisään yhtälön molemmille puolille luvun <u>11</u> . |
| $\frac{b}{9} - 11 + 11 = -8 + 11$ | MM | Muokkaan yhtälön puolia, laskemalla yhtälön vasemmalla puolella yhteen <u>-11</u> ja <u>11</u> . Oikealla puolella lasken yhteen luvut <u>-8</u> ja <u>11</u> . |
| $\frac{b}{9} = 3$ | K9 | Kerron yhtälöä puolittain luvulla <u>9</u> . |
| $9 \cdot \frac{b}{9} = 9 \cdot 3$ | MM | Muokkaan yhtälöä suorittamalla vasemmalla kertolaskun $\frac{9}{1} \cdot \frac{b}{9}$ ja oikealla kertolaskun <u>9</u> · <u>3</u> . |
| $b = 27$ | | Nyt näen, että alkuperäinen yhtälö on tosi, kun <u>b = 27</u> eli yhtälön ratkaisu on <u>27</u> . |

Tehtävä 3 Täydennä matemaattinen esitys ja sanallinen esitys

| Matemaattinen esitys | Muunnos | Sanallinen selitys |
|--------------------------|------------|--|
| $5y = 4y - 20$ | | |
| $5y - 4y = 4y - 4y - 20$ | V4y | Vähennän <u>4y</u> molemmilta puolilta yhtälöä. |
| $y = -20$ | MM | Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun <u>5y - 4y</u> vasemmalla ja <u>4y - 4y</u> oikealla puolella. Nämä yhtälöt ovat siis tosia, kun <u>y = -20</u> . |

Tehtävä 4 Täydennä muunnos ja sanallinen esitys

| Matemaattinen esitys | Muunnos | Sanallinen selitys |
|------------------------------|------------|---|
| $17 + 1 = 17 + 2a$ | | |
| $17 + 1 - 17 = 17 + 2a - 17$ | V17 | Vähennän puolittain luvun <u>17</u> . |
| $1 = 2a$ | MM | Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun <u>17 + 1 - 17</u> vasemmalla ja <u>17 - 17</u> oikealla puolella. |
| $\frac{1}{2} = \frac{2a}{2}$ | J2 | Jaan yhtälöä puolittain luvulla <u>2</u> . |
| $\frac{1}{2} = a$ | M | Muokkaan yhtälön oikeaa puolta suorittamalla jakolaskun $\frac{2a}{2}$. Nyt näen, että alkuperäisen yhtälön ratkaisu on $a = \frac{1}{2}$. |

Huomautuksia tehtävästä 4!

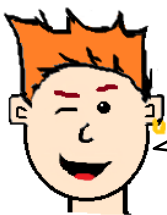
- Luvun 2 merkitseminen jakajaksi voi olla haastava kohta, johon kannattaa kiinnittää huomiota.
- Sanallisen selityksen viimeiseen kohtaan täydennetään vaihtoehtoisiksi ratkaisuksi $1/2 = a$ tai $\frac{1}{2}$.

Tehtävä 5 Täydennä yhtälön ratkaisutapaan 1 matemaattinen esitys ja ratkaisutapaan 2 käytetty muunnos.

| Tapa 1 | | Tapa 2 | |
|---|---------|------------------------------|---------|
| Matemaattinen esitys | Muunnos | Matemaattinen esitys | Muunnos |
| $4a = 2a + 2$ | $J2$ | $4a = 2a + 2$ | $V2a$ |
| $\frac{4a}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{2}{2}$ | MM | $4a - 2a = 2a - 2a + 2$ | MM |
| $2a = a + 1$ | Va | $2a = 2$ | $J2$ |
| $2a - a = a - a + 1$ | MM | $\frac{2a}{2} = \frac{2}{2}$ | MM |
| $a = 1$ | | $a = 1$ | |

Jokeri 6 Mitä muunnosta Kalle tai Leena on käyttänyt yhtälöön? Kirjoita ratkaisu sanallisesti **tai** lyhenteellä.

Harjoitellaan muunnoksia kielentämisen näkökulmasta.



$$5x - 3 - 2x - 3 = 0$$

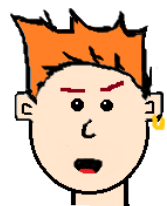
$$3x - 6 = 0$$

Kalle laski vasemmalla puolella luvut -3 ja -3 yhteen. (Muunnos: M)

Leena lisäsi molemmille puolille luvun 6. (Muunnos: $L6$)

$$3x - 6 = 0$$

$$3x - 6 + 6 = 0 + 6$$



$$62 = 62 + 17x$$

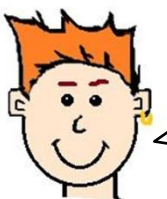
$$0 = 17x$$

Kalle vähensi molemmilta puolilta luvun 62 ja laski mahdolliset laskut puolittain. (Muunnos $L62$ MM)

Leena jakaa yhtälöä molemmilta puolilta luvulla 17. (Muunnos $J17$)

$$0 = 17x$$

$$\frac{0}{17} = \frac{17x}{17}$$



$$\frac{5}{4} + \frac{b}{2} = 2$$

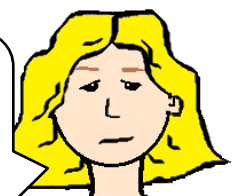
$$\frac{5}{4} - \frac{5}{4} + \frac{b}{2} = 2 - \frac{5}{4}$$

Kalle vähentää puolittain luvun $\frac{5}{4}$. (Muunnos: $V\frac{5}{4}$)

Leena kertoo molempia puolia luvulla 2. (Muunnos: $K2$)

$$\frac{b}{2} = \frac{3}{4}$$

$$2 \cdot \frac{b}{2} = \frac{3}{4} \cdot 2$$



Jokeri 7 Täydennä matemaattinen ja sanallinen esitys

| Matemaattinen esitys | Muunnos | Sanallinen selitys |
|----------------------------------|---------|---|
| $15x + 10 = 5x + 30$ | V10 | Vähennän <u>10</u> molemmilta puolilta yhtälöä. |
| $15x + 10 - 10 = 5x + 30 - 10$ | M M | Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun <u>+10 - 10</u> vasemmalla ja <u>30 - 10</u> oikealla puolella. |
| $15x = 5x + 20$ | V5x | <u>Vähennän termin 5x puolittain.</u> |
| $15x - 5x = 5x + 20 - 5x$ | M M | Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun <u>15x - 5x</u> vasemmalla ja <u>5x - 5x</u> oikealla puolella. |
| $10x = 20$ | J10 | <u>Jaan yhtälöä puolittain luvulla 10.</u> |
| $\frac{10x}{10} = \frac{20}{10}$ | M M | Muokkaan yhtälöä puolittain suorittamalla jakolaskut $\frac{10}{10}$ ja $\frac{20}{10}$. |
| $x = 2$ | | Nyt näen, että alkuperäisen yhtälön ratkaisu on <u>x = 2</u> . |

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

| Ryhmätaito | Onnistuminen | | | | |
|---|--------------|--|--|--|--|
| Autoimme ja rohkaisimme toisiamme | | | | | |
| Keskustelimme toisemme huomioiden | | | | | |
| Toistimme asioita tarvittaessa | | | | | |
| Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan | | | | | |
| Hyödynsimme virheitä oppiaksemme | | | | | |

Kotitehtävä 1

i) Täydennä yhtälön $3x = 2 - x$ ratkaisutavan

a) matemaattinen esitys

b) sanallisesti osio, johon kirjoitat, mitä yhtälölle tehdään ja mitä muunnosta käytetään.

ii) Tarkista lopuksi ovatko muunnettu (alimmainen) ja alkuperäinen yhtälö $3x = 2 - x$ tosia samalla muuttujan arvolla.

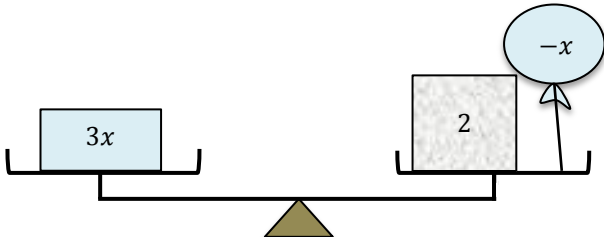
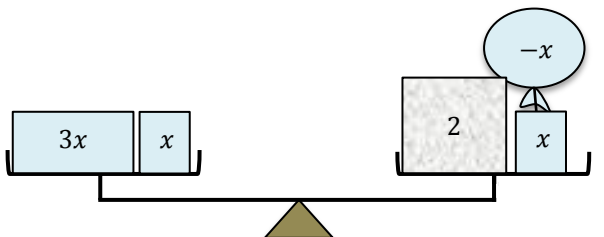
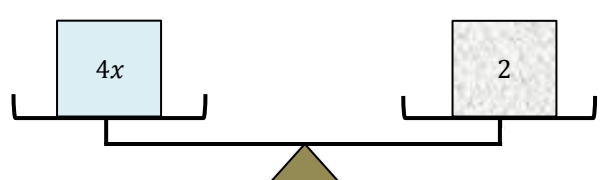
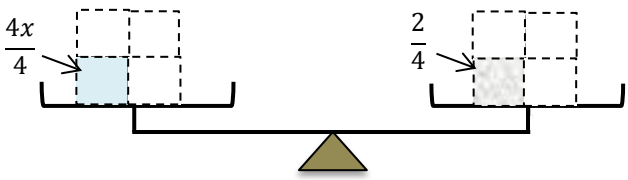
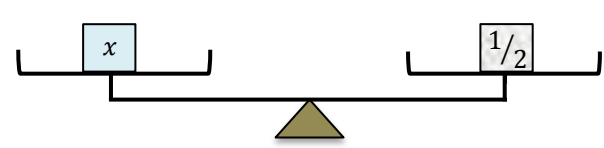
Ratkaisu: Alimmainen yhtälö $x = \frac{1}{2}$ on tosi, kun muuttujan paikalle sijoitetaan luku $\frac{1}{2}$.

Sijoitetaan $\frac{1}{2}$ myös alkuperäiseen yhtälöön $3x = 2 - x$, jolloin saadaan

$$3 \cdot \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Alimmainen ja alkuperäinen yhtälö ovat molemmat tosia muuttujan arvolla $\frac{1}{2}$ eli luku $\frac{1}{2}$ on yhtälön ratkaisu.

| vaakamalli | matemaattinen esitys | sanallisesti |
|---|------------------------------|--|
|  | $3x = 2 - x$ | Lisään x molemmille puolille. Muunnos: Lx |
|  | $3x + x = 2 + x - x$ | Lasken $3x$ ja x yhteen. Toisella puolella lasken x ja $-x$ yhteen. Muunnokset: MM |
|  | $4x = 2$ | Jaan molemmat puolet luvulla 4. Muunnokset: $J4$ |
|  | $\frac{4x}{4} = \frac{2}{4}$ | Sievennän jakolaskut molemmilla puolilla. Muunnokset: MM |
|  | $x = \frac{1}{2}$ | Muunnoksia käytettyäni näen, että muuttujan x arvolla $\frac{1}{2}$ alkuperäinen yhtälö on tosi. |

Kotitehtävä 2 Täydennä yhtälön ratkaisutapaan 1 matemaattinen esitys ja ratkaisutapaan 2 käytetty muunnos.

| Tapa 1 | | Tapa 2 | |
|------------------------------------|------------|--|------------|
| Matemaattinen esitys | Muunnos | Matemaattinen esitys | Muunnos |
| $\frac{1}{4}x + 2 = 6$ | | $\frac{1}{4}x + 2 = 6$ | |
| | V2 | | K4 |
| $\frac{1}{4}x + 2 - 2 = 6 - 2$ | | $4 \cdot \frac{1}{4}x + 4 \cdot 2 = 6 \cdot 4$ | |
| | M M | | M M |
| $\frac{1}{4}x = 4$ | | $x + 8 = 24$ | |
| | K4 | | V8 |
| $4 \cdot \frac{1}{4}x = 4 \cdot 4$ | | $x + 8 - 8 = 24 - 8$ | |
| | M M | | M M |
| $x = 16$ | | $x = 16$ | |