

2.3 Virheitä muunnosten käytössä

Esimerkissä 1 yhtälöratkaisuprosessi näytetään kokonaisuudessaan. Yhtälön rinnalla ovat muunnokset ja sanallinen selitys, johon oppilaat täydentävät esimerkissä käytetyt luvut.

Esimerkin 1 koonti

- Käy aluksi läpi tehtävän ratkaisuvaiheet ja käytetyt muunnokset.
- Kiinnitä lopuksi huomio yhtälöön kokonaisuutena,
 - o miltä näyttää kokonainen ratkaisu.
 - o Mikä on alkuperäinen yhtälö.
 - o Mihin muotoon yhtälö on muokattu muunnoksien avulla, josta nähdään yhtälön ratkaisu.
- Voit myös kysyä, mikä on jonkin välivaiheena olevan yhtälön ratkaisu (sama kuin lopussa). Tällä korostetaan sitä, että yhtälön ratkaisu säilyy, kun muunnoksia käytetään yhtälön ratkaisussa oikein.

Virheellisen ja oikean ratkaisun sisältävät tehtävät

Lopputunnin ”Kalle ja Leena” – tehtävissä on esitetty vierekkäin kaksi ratkaisutapaa, joissa yleensä toinen sisältää tarkoituksellisen virheen. Oppilaan tehtävä on etsiä virheitä, tarkistaa ratkaisuja, tutkia muunnoksia ja selittää auki, miten asia olisi pitänyt tehdä. Opettajan on hyvä muistaa kysyä ”miksi”, kun oppilaat esittävät ajatuksiaan

Esimerkki 2 koonti

- Oppilaat vertailevat tehtäviä aluksi pienen hetken pienryhmissä, sitten käydään opettajajohtoinen keskustelu luokan kanssa.
- Muistuta, että yhtälöratkaisussa muutetaan yhtälöä muunnosten avulla siten, että ratkaisu pysyy samana.
Apukysymyksiä:
 - Kohdassa a) Mitä voi päätellä siitä, että ratkaisut ovat erilaiset? Oppilaille ei välttämättä ole selvää, että eri ratkaisut tarkoittavat, että toinen ratkaisutavoista olisi virheellinen.
 - Kohdassa c) Kysy tarkemmin, mitä ”samanmuotoiset termit” tarkoittavat. Omin sanoin kuvailu on tärkeää.

Toimintaohje tehtävästä 3 eteenpäin

- Tehtävissä oppilaat tutkivat virheellistä ja oikeaa ratkaisutapaa pienryhmissä.
- Jos tehtävät käydään yhdessä lävitse, ei oppilaiden kannata kirjoittaa pitkiä ja tarkkoja malliratkaisuja. (Eryteisesti tehtävien 4,6,7,9 ja 10 a) - kohdat). Tärkeämpää on varmistaa, että virheet ovat löytyneet ja ymmärretään, mistä virhe johtuu ja miten se voidaan välttää tulevaisuudessa.

Esimerkki 1 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $45y + 90 = 60y$ seuraavilla tavoilla:

Aluksi yhdistän vasemman puolen termit keskenään.

Tämän jälkeen vähennän molemmilta puolilta 60y.

Lopuksi jaan yhtälöä puolittain luvulla 75 ja saan vastauksen.



Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$45y + 90 = 60y$	$45y + 90 = 60y$
$135y = 60y$	$45y - 45y + 90 = 60y - 45y$
$135y - 60y = 60y - 60y$	$90 = 15y$
$75y = 0$	$\frac{90}{15} = \frac{15y}{15}$
$\frac{75y}{75} = \frac{0}{75}$	$6 = y$
$y = 0$	

Aluksi vähennän molemmilta puolilta 45y.

Muokkaan yhtälön molempia puolia suorittamalla yhteenlaskut.

Lopuksi jaan yhtälöä puolittain luvulla 15.

Suoritan jakolaskut puolittain ja saan yhtälön ratkaisun.



a) Kuvaile mitä eroa Kallen ja Leenan ratkaisuissa on.

Kalle ja Leena ovat aloittaneet eri muunnoksilla. Kallella ja Leenalla on eri ratkaisut, joten ainakin toisen heistä on täytynyt tehdä virhe. Toisella heistä toisen rivin ratkaisu on eri kuin ensimmäisen rivin ratkaisu.

b) Kumpi on oikeassa? Miksi? Miten tarkistat tämän?

Kalle on yhdistänyt virheellisesti erimuotoiset termit, joten hän ei ainakaan voi olla oikeassa. Leena on käyttänyt muunnoksia oikein, joten hänen ratkaisunsa täytyy olla oikea.

Tämä voidaan tarkistaa sijoittamalla Leenan vastaus $y = 6$ alkuperäiseen yhtälöön. Tällöin saadaan $360 = 360$, joten yhtälö on tosi ja ratkaisu oikea. Jos puolestaan sijoitetaan Kallen ratkaisu $y = 0$, saadaan $90 = 0$.

Lisätietoa: Vasen ja oikea puoli eivät ole yhtä suuret, joten yhtälö ei ole tosi. Kallen toiselle riville sijoittamalla saadaan $0 = 0$, joten yhtälö on tosi. Tästä voidaan päätellä, että yhtälön ratkaisu on muuttunut ensimmäiseltä riviltä toiselle, joten ei ole käytetty muunnosta (muunnos säilyttää ratkaisun samana).

c) Mikä virhe on tehty? Kirjoita omin sanoin sääntö, jolla virhe voidaan välttää.

On virheellisesti yhdistetty erimuotoiset termit. Yhdistä vain samanmuotoisia termejä.

Kalle ja Leena ovat ratkoneet yhtälöitä ja vertailevat nyt ratkaisujaan samoille yhtälöille. Vastaa annettuihin kysymyksiin ja toimi opettajana tarkistaen Kallen ja Leenan ratkaisut yhtälöille.

Tehtävä 1



Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$4a = 20$	$4a = 20$
$\frac{4a}{20} = \frac{20}{20}$	$\frac{4a}{4} = \frac{20}{4}$
$a = 1$	$a = 5$



- a) Kerro suullisesti, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet yrittäessään ratkaista yhtälön $4a = 20$.



Sekä Kalle ja Leena ovat ajatelleet, että haluavat jakaa puolittain yhtälöä, jotta saadaan vastaus muotoa $a = \text{jotain}$. Kalle on kuitenkin jakanut luvun 4 luvulla 20, mistä EI tule ratkaisuksi yksi. Leena on jakanut luvun a kertoimella 4 molemmat puolet ja saanut ratkaisuksi $a = 5$. Kumpi ratkaisi oikein? Leena.

- b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.

- c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.



Yhtälön toiselle puolelle tulee saada pelkästään muuttujia, jotta ratkaisu voidaan nähdä helposti. Yhtälöä on jaettava puolittain muuttujan kertoimella.

Tehtävä 2 Kalle on tehnyt virheen yrittäessään ratkaista yhtälöä. Leena sen sijaan tietää, miten välttää tämä virhe. Kirjoita Leenan ratkaisu välivaiheineen näkyviin.

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
	$a + 8 + 12 = 20$ $20a = 20$ $\frac{20a}{20} = \frac{20}{20}$ $a = 1$	$a + 8 + 12 = 20$ $a + 20 = 20$ $a + 20 - 20 = 20 - 20$ $a = 0$	

Vain samanmuotoisia termejä saa yhdistää. Kalle on yhdistänyt termit a , 8 ja 20 , mikä ei ole mahdollista, sillä $a + 20$ ei ole sama asia kuin $a \cdot 20$. (Tämän jälkeen Kalle olisi osannut jatkaa oikein, mutta ratkaisu on jo muuttunut eikä $a = 1$ ole alkuperäisen yhtälön ratkaisu.)

Tehtävä 3

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
	$x + 5 = 10$ $x + 5 - 5 = 10 - 5$ $x = 5$	$x + 5 = 10$ $5x = 10$ $x = 10 - 5$ $x = 5$	

- a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $x + 5 = 10$. Kumpi ratkaisi oikein? Kalle.

Kalle on vähentänyt puolittain luvun 5 ja muokannut lausekkeita saaden vastauksensa. Leena on yhdistänyt termit $x + 5$ mikä ei ole mahdollista, sillä ne ovat erimuotoisia. Leena on tehnyt toisenkin virheen, sillä hän on vähentänyt puolittain luvun 5, vaikka laskua $5x - 5$ ei voi laskea.

- b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.

- c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Vain samanmuotoisia termejä saa yhdistää eli laskea yhteen tai vähentää keskenään.

Jos haluat saada kertoimen pois muuttujan edestä, se ei lähde vähentämällä vaan jakamalla, sillä $5x - 5$ ei voi laskea.

Tehtävä 4



Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$-y + 7 = 12$	$-y + 7 = 12$
$-y + 7 - 7 = 12 - 7$	$-y + 7 - 7 = 12 - 7$
$-y = 5$	$-y = 5$
$y = -5$	$y = 5$



a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $-y + 7 = 12$. Kumpi ratkaisi oikein? **Kalle.** *Kalle on vähentänyt puolittain luvun 7 ja kertonut puolittain luvulla -1 tai päätellyt, että jos $- = 5$, niin $y = -5$. Leena on vähentänyt puolittain luvun 7. Lopuksi Leena on unohtanut miinusmerkin.*

b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.

c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

*Saadakseen miinusmerkin pois muuttujan edestä, tulee kertoa tai jakaa luvulla -1, sillä $-1 \cdot (-1) = 1$.
Voit myös päätellä, että jos $- = 5$, niin y :n täytyy olla -5.*

Tehtävä 5 Leena ja Kalle ovat ratkaisseet yhtälöitä. Heiltä on jäänyt yksi välivaihe merkitsemättä...

Leenan ratkaisu	Kallen ratkaisu
$5 = k - 15$	$5 = k - 15$
	$5 + 15 = k - 15 + 15$
$-10 = k$	$20 = k$

- a) Kumpi on kiireestä huolimatta saanut tehtävän ratkaistua oikein? *Kalle*
 b) Täydennä puuttuva välivaihe viivalle siihen ratkaisuun, jossa ratkaisu oli oikein.

Tehtävä 6



Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$6 = \frac{x}{10} - 2$	$6 = \frac{x}{10} - 2$
$10 \cdot 6 = 10 \cdot \frac{x}{10} - 10 \cdot 2$	$10 \cdot 6 = 10 \cdot \frac{x}{10} - 2$
$60 = x - 20$	$60 = x - 2$
$80 = x$	$62 = x$



- a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $6 = \frac{x}{10} - 2$. Kumpi ratkaisi oikein? *Kalle*.
Kalle on kertonut yhtälöä aluksi puolittain luvulla 10. Leena on yrittänyt aloittaa samalla muunnoksella, mutta unohtanut kertoa lukua -2 luvulla 10. Kertomisen jälkeen on pyritty selvittämään x:n lukuarvo.
 b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.
 c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Jos kerrot (tai jaat) yhtälöä puolittain, muista toteuttaa laskutoimitus kaikille termeille.

Kertominen sulkuja käyttäen tulee materiaalissa myöhemmin, mutta tätä voi olla hyvä pohjustaa tässä ajatellen seuraavaa tuntia, jolla oppilaat luovat itse yhtälöitä muunnoksia käyttäen.

Jokeri 7



Kallen ratkaisu

$$-2 + y + 10 = 40$$

$$y + 8 = 40$$

$$\frac{y + 8}{8} = \frac{40}{8}$$

$$y = 5$$

Leenan ratkaisu

$$-2 + y + 10 = 40$$

$$y + 8 = 40$$

$$y + 8 - 8 = 40$$

$$y = 40$$



a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $-2 + y + 10 = 40$. Kumpi ratkasi oikein? *Ei kumpikaan. Kalle on aloittanut oikein yhdistämällä termit -2 ja 10 . Hän on yrittänyt sitten jakaa yhtälöä puolittain termillä 8 . Jakaminen ei tässä tilanteessa auttaisi ratkaisemista, sillä sekä y että 8 tulisi jakaa 8 :lla. Leena puolestaan on unohtanut vähentää termin 8 oikealta puolelta yhtälöä.*

b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.

c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

- 1) Jakaminen täytyy suorittaa kaikille termeille.
- 2) Muunnokset täytyy suorittaa molemmiin puolin yhtälöä.

Jokeri 8



Kallen ratkaisu

$$15 + 2 = 17 - 10a$$

$$17 = 17 - 10a$$

$$17 - 17 = 17 - 17 - 10a$$

$$0 = 0 - 10a$$

$$10 = -10a + 10$$

$$10 = a$$

Leenan ratkaisu

$$15 + 2 = 17 - 10a$$

$$17 = 17 - 10a$$

$$17 - 17 = 17 - 17 - 10a$$

$$0 = 0 - 10a$$

$$0 = -10a$$

$$\frac{0}{-10} = \frac{-10a}{-10}$$

$$0 = a$$



a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $15 + 2 = 17 - 10$. Kumpi ratkasi oikein? Leena.

b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.

c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Jos haluaa saada $10a$ muotoon a , tulee jakaa 10 :llä, ei lisätä sitä puolittain.

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Huomioita kotitehtävistä:

- Kotitehtävän 1 yhtälöitä ei ole tarkoituksella ratkaistu pitemmälle, sillä tutkitaan vain ensimmäistä muunnosta.
- Kotitehtävä 2 voi olla melko haastava.
- Kotitehtävien lisäksi oppilaat täyttävät luvun ITSEARVIOINNIN.

Kotitehtävä 1 Kalle ja Leena ovat lähteneet ratkaisemaan yhtälöä $15a = 10a + 30$.



Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu
$15a = 10a + 30$	$15a = 10a + 30$
$15a - 10a = 10a - 10a + 30$	$15a = 10a - 10a + 30$
...	...



a) Mitä muunnosta kumpikin on lähtenyt käyttämään ensimmäisenä? *Kumpikin on ajatellut vähentää puolittain termin $10a$.*

b) Kumpi on käyttänyt muunnosta oikein? *Kalle.*

c) Mistä tiedät, että toinen ratkaisu ei ole oikein? *Leenan ratkaisussa termi on vähennetty vain toiselta puolelta yhtälöä, jolloin yhtälön ratkaisu muuttuu eli alkuperäisellä yhtälöllä enää ole sama ratkaisu.*

d) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten tällaisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Muunnokset tulee muistaa tehdä molemmille puolille yhtälöä.

Itsearviointi (täytetään yksin aina luvun päätteeksi)

EOS = En osaa sanoa

1=Erittäin heikosti

7=Erinomaisesti

Miten hyvin osaat seuraavat asiat

- Lausekkeen ja yhtälön ero 1 2 3 4 5 6 7 EOS
- Yhtälön tasapaino 1 2 3 4 5 6 7 EOS
- Tutkia, onko yhtälö tosi/epätosi 1 2 3 4 5 6 7 EOS

- Olen oppinut tunneilla käsitellyt asiat. 1 2 3 4 5 6 7 EOS
- Onnistuin keskittymään perusteluihin vastausten sijaan. 1 2 3 4 5 6 7 EOS
- Onnistun löytämään ja esittämään kysymyksiä. 1 2 3 4 5 6 7 EOS
- Onnistuin kuvailemaan ajatteluni muille. 1 2 3 4 5 6 7 EOS
- Onnistuin hyödyntämään virheitä oppiakseni. 1 2 3 4 5 6 7 EOS