

## Luku 3 Yhtälön ratkaiseminen

**Luvussa 3** syvennetään ymmärrystä siitä, mitä muunnokset ovat ja harjoitellaan itse ratkaisemaan yhtälöitä. Ensimmäisen tunnin jälkeen voi valita, jatketaanko harjoittelua oppilaiden itse kotitehtävänään luomien yhtälöiden vai tässä vihkossa valmiina olevien tehtäväsarjojen avulla. Yhtälöitä ratkaistessa tullaan myös huomaamaan, että muunnokset soveltuvat eri yhtälöiden ratkaisuun eri tavoin. Esimerkiksi joskus kannattaa jakaa aluksi, joskus taas siitä ei ole mitään hyötyä.

### 3.1 Yhtälön luominen ja ratkaiseminen

Tiesitkö, että toisen maailmansodan tapahtumien kulkuun vaikuttivat merkittävästi salausta ja salakuuntelumenetelmät? Nykyään digitaalisen tiedon salaaminen on yhä tärkeämpää. Tällä tunnilla yhtälöitä salataan ja hakkeroidaan käyttämällä erilaisia muunnoksia yhtälön haastavoittamiseksi (salaaminen) tai helpottamiseksi (hakkerointi).

*Opettaja voi halutessaan maalata tehtävälle kehyskertomuksen liittyen toisen maailmansodan tapahtumiin tai FBI:n salapoliisien ja hakkerien väliseen konfliktiin. Yhteistyötä voi tehdä historian opettajan kanssa.*

#### MUUNNOKSIA

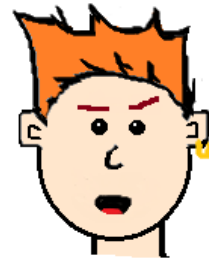
**Muunnos L:** saman termin lisääminen yhtälön molemmille puolille

**Muunnos V:** saman termin vähentäminen yhtälön molemmilta puolilta

**Muunnos J:** molempien puolien jakaminen samalla nollasta eroavalla luvulla

**Muunnos K:** molempien puolien kertominen samalla nollasta eroavalla luvulla

**Muunnos M:** Yhtälössä olevan lausekkeen/lausekkeiden muokkaaminen.



#### Tunnin rakenne:

- Kotitehtävät ja kertaus (10min)
- Yhtälön luominen, Tehtävä 1 (10min)
- Taulun analysointi, Tehtävä 2 (5min)
- Yhtälöiden ratkaisu ja vertailuvaihe, Tehtävä 3 (10min)
- Pohdinta (Jokeri 4), tunnin koonti ja ryhmäitseoarviointi (10min)

#### Tunnin tavoitteet:

- Harjoitellaan muunnosten käyttöä ja luovuutta yhtälöitä luomalla
- Opitaan analysoimaan ja luokittelemaan erilaisia yhtälöitä. (esim. Mikä tekee yhtälöstä haastavan?)
- Harjoitellaan yhtälönratkaisua toisten oppilaiden luomia yhtälöitä ratkaisemalla
- Huomataan, että sopivan muunnoksen valintaan liittyy usein jonkin laskutoimituksen kumoaminen
- Harjoitellaan mielekkään ilmapiirin luomista ja vastuun ottamista omasta oppimisesta

**Toimintaohje:** Tällä tunnilla oppilaat luovat alkutunnista ryhmissään yhtälöitä. Käytetään siis muunnoksia, mutta käänteisessä järjestyksessä verrattuna, jos luotua yhtälöä ratkaistaisiin. Lopputunti käytetään ryhmien luomien yhtälöiden ratkaisemiseen ja näiden analysointiin.

**BONUS:** Ennen tehtävää opettaja voi rohkaista luovuuteen lukujen keksimisessä (alussa ja muunnosten yhteydessä keksitään lukuja) antamalla oppilaille hetken aikaa (30 s) pohtia "Millaisia erilaisia lukuja on olemassa?" ja kokoamalla oppilaiden ideoita taululle.

**Tehtävä 1** Luokaa ryhmässä yhtälö alhaalta ylöspäin. (Myöhemmin ryhmät ratkaisevat toistensa yhtälöitä.)

Opettaja voi rohkaista oppilaita käyttämään luovuutta muuttujan valinnassa. Esimerkiksi kysymällä "Millä muuttujaa voi merkitä?" Oppilaat: "x:llä?" "Tai?"...hiljaisuus... Oppilaat: "t:llä?" "Tai..?" Oppilailta alkaa sadella muitakin ehdotuksia. "Olette ehkä tottuneet käyttämään x:ää, vaan nyt voitte itse valita vapaasti, millä merkitsette muuttujaa."

**Huomautus!** Kaikkien kannattaa kirjoittaa omalle paperilleen ryhmän yhteinen yhtälö tai muuten on vaikea ymmärtää, mitä ollaan tekemässä.

**a) Keksikää ryhmässä luku ja muuttuja, jotka merkitsette yhtä suuriksi (Seuraavalla sivulla on tilaa kirjoittaa).**

Esimerkissä  $12 = t$ .

**b) Tehkää tälle yhtälölle yhdessä valitsemianne muunnoksia. Edetkää alhaalta ylös.**

Esimerkissä on kerrottu puolittain luvulla 3 (K3), lisätty molemmille puolille  $2t$  (L  $2t$ ) ja laskettu  $3t$  ja  $2t$  yhteen (M).

<u>Yhtälön luomisen aloittaminen</u>		<u>Lopputulos</u>
$12 \cdot 3 = 3 \cdot t$		$36 + 2t = 5t$
		$36 + 2t = 3t + 2t$
	...	$12 \cdot 3 = 3 \cdot t$
$12 = t$		$12 = t$

Diagram illustrating the transformation of the equation  $12 = t$  into  $36 + 2t = 5t$  and back to  $12 = t$ . The steps are labeled with operations: K3 (multiplication by 3), L  $2t$  (addition of  $2t$  to both sides), and M (simplification).

Yhtälön luomisessa täytyy keskittyä oikean vastauksen sijaan **päättelyyn** eli siihen "miksi näin saa tai ei saa tehdä". Kaikki ideat voidaan perustella tarkistamalla pysyykö yhtälön ratkaisu samana. Mikä tahansa menetelmä muuttaa yhtälöä on toimiva muunnos, jos ratkaisu pysyy samana.

**Luomisessa liikkeelle** voi auttaa rohkaisemalla "saatte valita minkä tahansa luvun ja muuttujasymbolin, kaikki käy" ja sitten "valitkaa jokin muunnos (L, V, J, K) ja luku" sekä "muokatkaa välillä lausekkeita eli laskekaa niissä olevia laskuja".

**Yleisiä oppilaiden virheitä, harhakäsityksiä ja ihmettelyitä:** A) Yhdistetään erimuotoisia termejä. B) "Ei tällä luvulla voi jakaa, koska ei tule kokonaislukua." C) "Voikohan muuttujaa lisätä tai vähentää? Voiko muuttujalla kertoa tai jakaa?" Voi, mutta muuttujalla kertomisen jälkeen myös 0 on ratkaisu ja muuttujalla jaettaessa muuttuja ei voi olla 0.

Alkuun pääseminen voi tuntua oppilaista **aluksi haastavalta** ja hämmentävältä. Sitä suurempi on **onnistumisen elämys**, kun he huomaavat pystyvänsä luomaan kokonaan oman yhtälön.

**Ryhmien ilmapiiri vaikuttaa valtavasti** siihen, miten tehtävää tehdään. Joissakin ryhmissä keskustellaan yhdessä, mitä muunnoksia olisi kiinnostavinta käyttää, toisessa ryhmässä yksi päättää kaikki muiden tehdessä perässä ja kolmannessa autetaan jokaista ryhmän jäsentä keksimään yhden muunnoksen. Jotkut ryhmät saattavat tehdä kokonaan omat yhtälönsä keskustelematta lainkaan. Opettajan täytyy antaa neuvoja ryhmätyöskentelyyn oppilaantuntemusta ja tilannetajua käyttäen. Yleisesti oppilaita voi kehottaa huolehtimaan jokaisesta ryhmänjäsenestä: Toisia täytyy rohkaista osallistumaan ja toisia antamaan tilaa muillekin. Tavoitteena on, että kaikki ryhmän jäsenet ymmärtävät, miten oma yhtälö luotiin.

c) Olette luoneet ryhmässä yhtälön. Kirjoittakaa yhtälö taululle nimienne kanssa (esimerkissä  $36 + 2t = 5t$ ).

Huolehtikaa, että kaikki ryhmäläisenne ymmärsivät, mitä teitte. Osaatko sanoa laskematta, millä muuttujan arvolla luomanne yhtälö on tosi? Jos tekisit uuden yhtälön, niin miten yhtälöstä voisi tehdä haastavamman?

Nopeimpia ryhmiä voi tarvittaessa ohjata keksimään haastavampia ("ovelampia") yhtälöitä taululle.

**Tehtävä 2** Tutkikaa taululle ilmestyviä yhtälöitä: Ovatko ne erilaisia? Millä tavoin?

Kun kaikki ryhmät ovat kirjoittaneet taululle yhtälönsä, voidaan analysoida yhdessä niitä. Oppilaiden ideoita on tässä helppo kehua! Oppilaat voivat pohtia esimerkiksi:

- Onko joku vaikea? Miksi? Onko joku helppo? Miksi?
- Millaisia laskutoimituksia niissä on? (+, -, ·, /, sulkuja)
- Millaisia lukuja niissä on? (isot luvut, murtoluvut, desimaaliluvut, negatiiviset luvut, toinen muuttuja, pii....)
- Kuinka pitkiä yhtälöt ovat tai arviolta kuinka montaa muunnosta on käytetty?
- Voiko yhtälöistä päätellä päässä, mikä on ratkaisu?

Jos oppilaat ovat kovin hiljaisia, voi antaa minuutin aikaa keskustella ryhmissä ensin.

**Tehtävä 3 Ratkaisuvaihe:** Ratkaiskaa toisten laatimia yhtälöitä. **Vertailuvaihe:** Käykää keskustelemassa jokaisesta ratkaisustanne keksijäryhmän kanssa. Miten ratkaisitte/loitte yhtälön? Mitä olette tehneet samoin tai eri tavalla?

Vertailuvaihe tuo esille luokassa vallitsevan oppilaiden oppimiskulttuurin ja samalla antaa mahdollisuuden ohjata rakentavan ilmapiirin luomiseen. Opettaja voi painottaa, että virheiden löytäminen ryhmien vertailuvaiheessa on parasta mitä voi tapahtua. Virheet ovat aarteita, joita yhdessä tutkimalla oppilaat voivat huomata uusia asioita yhtälönratkaisuun liittyen. Ei siis ole tarkoitus piilotella omaa tuotosta ja sanoa "väärin, mee takas omalle paikalle!"

Jos oppilaat ovat kirjoittaneet muunnokset näkyviin, heidän on helpompi kuvailla ääneen toisilleen, mitä ovat tehneet. Ihannetapaus olisi, että oppilaat nähdään rinnatusten vihkot vierekkäin osoittelemassa sormella kohtia ratkaisuisaan ja kuvailemassa, mitä kumpainenkin ryhmä teki. Todennäköisesti monet kuitenkin vain tarkistavat ratkaisun ja menevät takaisin omalle paikalleen. Tässä täytyy ottaa huomioon oppilaiden erilaisuus ja antaa aikaa muutokselle.

### Ryhmän luomat yhtälöt

1.

2.

3.

$\underline{\quad} = \underline{\quad}$		
<b>Ryhmän valitsemat ratkaistavat yhtälöt</b>		
1. $\underline{\quad} = \underline{\quad}$	2.	3.

#### Jokeri 4 Pohdi seuraavia kysymyksiä

- a) Onko merkitystä, missä järjestyksessä muunnoksia tehdään?

*Jakaminen ja kertominen ovat ikään kuin samaa perhettä samoin kuin lisääminen ja vähentäminen ovat keskenään samaa perhettä. Samaa perhettä olevien peräkkäisten muunnoksien järjestyksellä ei ole väliä. Jos lausekkeissa on useampia termejä, niin sen jälkeen tulee muistaa kertoa kaikki termit tai kirjoittaa sulkulauseke. Esim.  $K3 L2$  tuottaa erisuuruisen lausekkeen kuin  $L2 K3$ .*

- b) Mitä samaa ja erilaista on yhtälön luomisessa ja ratkaisemisessa?

*Molemmassa muunnetaan yhtälöä niin, että syntyneet yhtälöt ovat kaikki tosia samalla muuttujan arvolla (eli ratkaisu säilyy). Erilaista on, että luomisessa käytetään luovuutta ja lopputulos on avoin, mutta ratkaisemisessa täytyy valita strategisesti juuri sellaisia muunnoksia, joilla saadaan yhtälö helpommaksi.*

- c) Mitä tarkoittaa, että laskutoimitukset kumoavat toisensa? Miten idea liittyy yhtälöratkaisuun?

*Tähän liittyy myös oppilaille jännä idea, että yhteen- ja vähennyslasku sekä kerto- ja jakolasku kumoavat toisensa eri tavoilla. Toisessa kumoutumisen seurauksena on 0 ja toisessa 1. Yhtälöä ratkaistessa täytyy kumota laskutoimituksia.*

- d) Millaisia erilaisia yhtälöitä a) on olemassa b) osaat luoda c) osaat ratkaista?

*Jos tehtävää haluaisi laajentaa usean tunnin pituiseksi ”projektiksi”, osaamista olisi helppo arvioida ”portfoliolla”.*

- e) Millaisia keinoja löysit, joilla yhtälöistä saa tehtyä haastavamman?

*Käytin jakamismuunnosta, murto-lukuja, sulkulausekkeita, toista muuttujaa tai puita. Lausekkeen muokkausta voi käyttää myös toiseen suuntaan  $6t = 2 \cdot 3t = 2 \cdot (4t - t)$ . (Tämä idea soveltuu lausekkeiden tutkivaan harjoitteluun.)*

- f) Millaisia virheitä löytyi?
- g) Millaisia erilaisia ratkaisutapoja löytyi?
- h) Millaisia hämmennyksiä ja kysymyksiä jäi vielä auki?
- i) Mitä uutta oivalsit? Mitä opit?
- j) Miten onnistuit toisten ideoiden kuuntelemisessa ja vertailussa?

**Loppukoonti** riippuu siitä mitä oppilaat ovat löytäneet. Koontiin voi valmistautua pohtimalla Jokerin 4 kysymyksiä. Opettaja voi pyytää jotain ryhmää kuvailemaan dokumenttikameran avulla jonkin hyvän idean (virhe, luova lähestymistapa, oivallus ym.), jonka tunnin aikana havaitsi.

### RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

**Kotitehtävä 1** Millä muunnoksella aloittaisit seuraavien yhtälöiden ratkaisemisen?

- a)  $5 = 4x$   
*J4 (jakaminen luvulla 4)*
- b)  $\frac{(1-a)}{3} = 2$   
*K2 (kertominen luvulla 2)*
- c)  $-s + 2 = 2s - 1$   
*Ls (lisätään termi s)*

#### Huomautuksia kotitehtävästä 1

- Tehtävän voi aloittaa millä tahansa muunnoksella!
- Yhtälönratkaisussa pohditaan, mikä muunnos tekee yhtälön helpommaksi. On olemassa erilaisia ja yhtä lailla oikeita ratkaisutapoja. Jotkut ratkaisutavat ovat tehokkaampia kuin toiset.
- Tehtävää kannattaa analysoida ennen tehtävän aloittamista ja sen jälkeen.

#### Kotitehtävä 2

- a) Luo muunnoksia käyttäen yhtälö toisten ratkottavaksi.
- b) Ratkaise oma yhtälösi.

Opettaja voi yhdessä oppilaiden kanssa päättää jatketaanko yhtälönratkaisun harjoittelua ensi tunnilla keräämällä kotitehtävänä luodut yhtälöt taululle ja käyttämällä tämän tunnin ideaa vai ratkaisemalla materiaalissa seuraavana olevia valmiita yhtälöitä.

**Kotitehtävä 3** Keksi yhtälö, jonka ratkaisemiseksi kannattaisi seuraavaksi

- a) Vähentää tai lisätä puolittain

*Esím.*  $x + 2 = 2x$

- b) Jakaa tai kertoa puolittain

*Esím.*  $\frac{t}{4} - 3 = 2$