

4.2 Sulkuyhtälöt ja joustavuus

Oppitunnin rakenne:

- Kertaus ja kotitehtävät (5 min)
- Esimerkki 1 (10 min)
- Tehtävät (25min)
- Koonti ja ryhmäarviointi (5 min)

Oppitunnin tavoitteet

- Analysoidaan ja tuotetaan useita ratkaisutapoja samoille yhtälöille.
- Löydetään itselle helpoin tapa ratkaista yhtälö ja kehitetään samalla omia sekä yhtälönratkaisu-, että ongelmanratkaisutaitoja.

Toimintaohje: Aiemmin on totuttu vertailemaan useampaa ratkaisutapaa rinnakkain. Nyt vertailun lisäksi aletaan harjoitella itsenäisesti tuottamaan useampi ratkaisutapa samalle yhtälölle. Tällä vahvistetaan oppilaan käsitystä omista taidoista ratkaista yhtälöitä ja annetaan käyttää omaa luovuutta ja kekseliäisyyttä erilaisten tapojen luomisessa esitettyjä malleja apuna käyttäen.

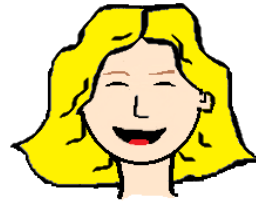
Esimerkki 1 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $3(x + 2) = 15$ seuraavilla tavoilla:

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
Ensin kerroin vasemman puolen sulkeet auki.	$3(x + 2) = 15$	$3(x + 2) = 15$	Ensin jaoin yhtälön puolittain luvulla 3
Seuraavaksi vähensin luvun 6 molemmilta puolilta	$3x + 6 = 15$	$\frac{3(x + 2)}{3} = \frac{15}{3}$	Seuraavaksi vähensin luvun 2 molemmilta puolilta
Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 3	$3x + 6 - 6 = 15 - 6$	$x + 2 = 5$	Vastaukseni on $x = 3$
Sain vastaukseksi $x = 3$	$3x = 9$	$x + 2 - 2 = 5 - 2$	
	$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$	$x = 3$	
	$x = 3$		



- Kuinka Kalle ratkaisi yhtälön? Entä Leena? Ovatko he päätyneet oikeaan ratkaisuun? Mistä tiedät tämän?
- Huomaatko yhtäläisyyksiä Kallen ja Leenan ratkaisuissa?
- Kumpaa tapaa itse käyttäisit kyseisen yhtälön ratkaisuun?
- Jos yhtälö olisi muotoa $3(x + 2) = 17$, kumpi ratkaisutavoista olisi parempi, miksi?





Ensin kerroin vasemman puolen sulkeet auki.

Seuraavaksi vähensin luvun 6 molemmilta puolilta

Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 3 ja sievensin jakolaskut

Sain ratkaisuksi $x = \frac{11}{3}$

Kallen ratkaisu

$$3(x + 2) = 17$$

$$3x + 6 = 17$$

$$3x + 6 - 6 = 17 - 6$$

$$3x = 11$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{11}{3}$$

$$x = \frac{11}{3}$$

Leenan ratkaisu

$$3(x + 2) = 17$$

$$\frac{3(x + 2)}{3} = \frac{17}{3}$$

$$x + 2 = \frac{17}{3}$$

$$x + 2 - 2 = \frac{17}{3} - 2$$

$$x = \frac{17}{3} - \frac{6}{3}$$

$$x = \frac{11}{3}$$

Ensin jaoin yhtälön puolittain luvulla 3

Seuraavaksi vähensin luvun 2 molemmilta puolilta

Lavensin samannimisiksi.

Sain ratkaisuksi $x = \frac{11}{3}$

a) Ratkaisun eteneminen on luettavissa puhekuplista, eikä laskuvirheitä ole tullut.

Tarkistetaan sijoittamalla saatu vastaus alkuperäiseen yhtälöön.

$$3(3 + 2) = 15$$

$$3 \cdot 5 = 15$$

$$15 = 15$$

b) Kumpikin on jossain vaiheessa jakanut yhtälöä puolittain luvulla 3. Molemmat ovat vähentäneet puolittain jonkun luvun (ei kuitenkaan samaa lukua) ja he ovat päätyneet samaan vastaukseen.

c) Kallen ratkaisutapa, koska Leenan tavalla oikealle puolelle tulee puolittain jakamisen jälkeen murtoluku. Tämä ei ole ongelma, mutta joudutaan varhaisessa vaiheessa pyörittelemään murtolukuja, kun Kallen ratkaisutavalla murtoluvut syntyvät vasta aivan lopussa.

Huomioita Esimerkistä 1 opettajalle:

- Jos Leenan ratkaisu tuntuu vaikealta ymmärtää, voi opettaja esittää tilanteen yhtälön $3y = 15$ avulla. Tämän yhtälön esittämällä voi joillekin oppilaille selkeytyä, miksi luvulla 3 jakaminen on nyt mahdollista ensimmäisenä. Tässä muuttujalla y on korvattu lauseke $x + 2$.
- Opettaja kertoo, milloin kyseistä joustavaa lähestymistapaa kannattaa hyödyntää yhtälöitä ratkaistaessa. (Kun $a(x + b) = c$, niin kannattaa jakaa ensin puolittain a :lla, jos c on jaollinen a :lla. Muulloin oikealle puolelle tulee puolittain jakamisen jälkeen murtoluku. Verrataan tilanteeseen, jossa ratkaisutavat ovat pysyneet samoina, mutta yhtälö on muotoa $3(x + 2) = 17$.)
- **Vertailun hyödyllisyydestä**, jotta oppilaille voidaan kertoa miksi tätä tapaa käytetään.
 - Tehtävät voidaan ratkaista eri tavoilla eli ratkaisuun voidaan päästä useita eri lähestymistapoja käyttäen.
 - Eri ratkaisutavoilla pitää tulla sama ratkaisu, jos tehtävä on ratkaistu oikein. Useita ratkaisutapoja voidaan käyttää apuna tarkistamisessa.
 - Vertailemalla rinnakkain eri ratkaisutapoja oppii näkemään yhteyksiä erilaisten tehtävien ja matemaattisten käsitteiden välillä.

Tehtävä 1 Ratkaise yhtälöt kahdella eri tavalla.

a) $5(t + 2) = 11$

$5(t + 2) = 11$ M

$5 \cdot t + 5 \cdot 2 = 11$ M

$5t + 10 = 11$ V10MM

$5t = 1$ J5MM

$t = \frac{1}{5}$

$5(t + 2) = 11$ J5

$\frac{5(t+2)}{5} = \frac{11}{5}$ M

$t + 2 = \frac{11}{5}$ V2

$t + 2 - 2 = \frac{11}{5} - \frac{10}{5}$ MM

$t = \frac{1}{5}$

b) $5(t + 2) = 10$.

$5(t + 2) = 10$ J5MM

$t + 2 = 2$ V2MM

$t = 0$

$5(t + 2) = 10$ M

$5t + 10 = 10$ V10MM

$5t = 0$ J5MM

$t = 0$

Tehtävässä 2 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälöt ja toinen on tehnyt virheen. Tutustutaan joustavaan tapaan ratkaista yhtälöitä ja alustavasti seuraavan tunnin aiheeseen.

Tehtävä 2 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $5(a + 3) = 20$ seuraavilla tavoilla:



Ensin jaoin yhtälön puolittain luvulla 5

Lopuksi vähensin luvun 3 molemmilta puolilta

Sain ratkaisuksi $a = 1$

Kallen ratkaisu

$5(a + 3) = 20$

$\frac{5(a + 3)}{5} = \frac{20}{5}$

$a + 3 = 4$

$a + 3 - 3 = 4 - 3$

$a = 1$

Leenan ratkaisu

$5(a + 3) = 20$

$5(a + 3) - 3 = 20 - 3$

$5a = 17$

$\frac{5a}{5} = \frac{17}{5}$

$a = \frac{17}{5}$



Ensin vähensin luvun 3 molemmilta puolilta.

Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 5

Sain ratkaisuksi $a = \frac{17}{5}$

- Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $5(a + 3) = 20$. Kumpi ratkaisi oikein? **Kalle.** *Leena laski virheellisesti $5(a + 3) - 3 = 5a$, sillä sulut olisi pitänyt kertoa auki ennen termien yhdistämistä.*
- Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.
- Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Sulut olisi pitänyt purkaa auki ennen vähennyslaskun suorittamista.

Tehtävä 3 Tarkastele Jessican ja Mintun ratkaisutapoja yhtälölle $4(t - 1) + 3(t - 1) = 35$.

a) **Jessican** ratkaisutapa. Täydennä vaiheet tyhjille viivoille esimerkin avulla.

$4(t - 1) + 3(t - 1) = 35$	Ensin <u>avasin vasemmalla puolella yhtälöä olevat sulut.</u>
$4t - 4 + 3t - 3 = 35$	Lasken <u>4t</u> ja <u>3t</u> yhteen sekä <u>-4</u> ja <u>-3</u> yhteen.
$7t - 7 = 35$	<u>Vähennän</u> luvun 7 puolittain
$7t = 42$	Jaan luvulla <u>7</u> puolittain ja sievennän jakolaskut
$t = 6$	

b) **Mintun** ratkaisutapa. Täydennä vaiheet tyhjille viivoille.

$4(t - 1) + 3(t - 1) = 35$	Lasken <u>4(t - 1)</u> ja <u>3(t - 1)</u> yhteen.
$7(t - 1) = 35$	<u>Jaan</u> luvulla 7 puolittain.
$t - 1 = 5$	Lisään luvun <u>1</u> puolittain.
$t = 6$	

c) **Pohdi**

- i) Mitä eroa Jessican ja Mintun ratkaisutavoilla on? *Jessica on aluksi kertonut sulkeet auki, kun Minttu ei missään vaiheessa yhtälönratkaisua kertonut sulkeita auki. Mintun ratkaisutapa on lyhyempi kuin Jessican ratkaisutapa.*
- ii) Jos pitäisi ratkaista yhtälö $4(y + 5) + 6(y + 4) + 5(y + 2) = 45$, kumman ratkaisutapaa käyttäisit? Ympyröi ratkaisusi;
- Jessican

Mintun
- iii) Perustelu valintaasi: *Sulkujen sisällä ei ole sama lauseke, joten niitä ei voi yhdistää. Siksi aluksi kerrotaan vasemmalla puolella kaikki sulut auki ja lähdetään Mintun tavalla ratkaisemaan yhtälöä eteenpäin.*

Tehtävä 4 Ratkaise yhtälö $4(y + 4) + 6(y + 4) + 5(y + 4) = 45$ valitsemallasi ratkaisutavalla.

Mintun tavalla:

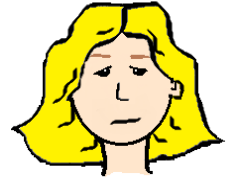
Jessican tavalla:

$4(y + 4) + 6(y + 4) + 5(y + 4) = 45$	M	$4(y + 4) + 6(y + 4) + 5(y + 4) = 45$	M
$15(y + 4) = 45$	J15 M M	$4y + 16 + 6y + 24 + 5y + 20 = 45$	M
$y + 4 = 3$	V4 M M	$15y + 60 = 45$	V60 M M
$y = -1$		$15y = -15$	J15 M M
		$y = -1$	

Jokeri 5 Ratkaise yhtälö $4(t + 1) + 3(t + 2) = 7$.

$4(t + 1) + 3(t + 2) = 7$	M
$4t + 4 + 3t + 6 = 7$	M
$7t + 10 = 7$	V10 M M
$7t = -3$	J7 M M
$t = -\frac{3}{7}$	

Jokeri 6 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $2(m + 3) = -4(m + 3) + 12$ seuraavilla tavoilla:



Kallen ratkaisu		Leenan ratkaisu
$2(m + 3) = -4(m + 3) + 12$		$2(m + 3) = -4(m + 3) + 12$
	MM	$L4(m + 3)$
$2m + 6 = -4m + (-12) + 12$		$2(m + 3) + 4(m + 3) = -4(m + 3) + 4(m + 3) + 12$
	M	MM
$2m + 6 = -4m$		$6(m + 3) = 12$
	V2m	J6
$2m - 2m + 6 = -4m - 2m$		$\frac{6(m + 3)}{6} = \frac{12}{6}$
	MM	MM
$6 = -6m$		$m + 3 = 2$
	J-6	V3
$\frac{6}{-6} = \frac{-6m}{-6}$		$m + 3 - 3 = 2 - 3$
	MM	MM
$-1 = m$		$m = -1$



a) Mitä Kalle on tehnyt yhtälölle ensimmäisenä? Entä Leena? *Kalle on aluksi kertonut sulklausekkeet auki yhtälön vasemmalla ja oikealla puolella. Leena on aluksi lisännyt molemmille puolille termin $4(m + 3)$.*

b) Merkitse Kallen ja Leenan ratkaisuihin käytetyt muunnokset lyhenteillä näkyville. (Mallina Leenan ratkaisussa toinen käytetty muunnos).

c) Ovatko Kalle ja Leena päätyneet oikeaan ratkaisuun? Mistä tiedät tämän? (Laita tarkistus perusteluksi alle) *Sijoitetaan saatu vastaus alkuperäiseen yhtälöön ja tarkistetaan näin vastaus.*

$$\begin{aligned} 2(-1 + 3) &= -4(-1 + 3) + 12 \\ -2 + 6 &= 4 - 12 + 12 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Kalle ja Leena ovat päätyneet oikeaan ratkaisuun.

d) Kumpaa ratkaisutavoista (Kallen vai Leenan) itse käyttäisit? Perustele. *Käytän Leenan tapaa, koska yhtälön molemmilla puolilla on sellaiset sulklausekkeet, joissa sulkujen sisältö on sama. Yhtälö sievenee nopeammin, kun aluksi lisää sopivasti puolittain sulklausekkeen, jotta toiselta puolelta saadaan sulklausekkeet kokonaan pois.*

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Kotitehtävä 1 Kirjoita, ensimmäinen muunnos seuraavien yhtälöiden ratkaisussa. Sinun **EI TARVITSE** siis ratkaista yhtälöä loppuun. Yritä löytää myös toinen tapa lähteä liikkeelle.

a) $2(y + 6) + 3(y + 6) = 25$

b) $9 = 3(t - 3) + 2(2t - 3) + 7(t - 3)$

c) $6 = 3(t - 3)$

Tapa 1 M	Tapa 1 M	Tapa 1 J3 M M
$5(y + 6) = 25$	$9 = 12(t - 3)$	$2 = t - 3$
Tapa 2 M	Tapa 2 M	Tapa 2 M
$2y + 12 + 3y + 18 = 25$	$9 = 3t - 9 + 4t - 6 + 7t - 21$	$6 = 3t - 9$

Kotitehtävä 2 Ratkaise yhtälö kahdella eri tavalla $-12(5y + 2) = 24$

Tavalla 1:

$$\begin{aligned}
 -12(5y + 2) &= 24 && \text{J -12 M M} \\
 5y + 2 &= -2 && \text{V2 M M} \\
 5y &= -4 && \text{J5 M M} \\
 y &= -\frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

Tavalla 2:

$$\begin{aligned}
 -12(5y + 2) &= 24 && \text{M} \\
 -60y - 24 &= 24 && \text{L24 M M} \\
 -60y &= 48 && \text{J -60 M M} \\
 y &= -\frac{48}{60} && \text{M} \\
 y &= -\frac{4}{5}
 \end{aligned}$$