

## 4.3 Lisää joustavia yhtälöitä

### Oppitunnin viitteellinen rakenne:


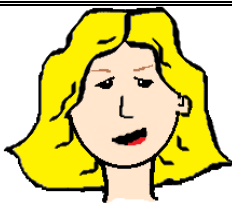
- Kertaus ja kotitehtävät (10min)
- Esimerkki 1 (10 min)
- Tehtävät (20 min)
- Koonti ja ryhmäarviointi (5 min)

### Oppitunnin tavoitteet

- Analysoidaan lisää erilaisia ratkaisutapoja samalle yhtälölle.
- Ratkaistaan erilaisia yhtälöitä.
- Kehitetään joustavuutta.

**Toimintaohje:** Tunnilla jatketaan yhtälöiden ratkaisemista ja erilaisten ratkaisutapojen vertailua. Mukaan otetaan murtoyhtälöt ja käydään läpi esimerkki ja haetaan niistä mallia joustavaan ja helpompiin tapoihin ratkaista monimutkaisempia yhtälöitä. Monipuolisuutta erilaisille ratkaisutavoille tuodaan lisäämällä yhtälölle kolmas erilainen ratkaisutapa vertailutehtäviin Miian ratkaisutavan avulla. Näin luodaan esimerkkejä erilaisten yhtälöiden ratkaisulle ja annetaan vinkkejä oppilaille rohkeasti kokeilla ja luoda omia erilaisia ratkaisutapoja.

**Esimerkki 1** Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön  $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = -2$  seuraavilla tavoilla:

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
<p>Kerron yhtälöä puolittain luvulla 20, joka on nimittäjien pienin yhteinen jaettava</p> <p>Tämän jälkeen sievensin yhtälön vasenta ja oikeaa puolta.</p> <p>Lopuksi vielä laskin vasemmalla puolella yhteen <math>5x</math> ja <math>-4x</math>.</p>	$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = -2$	$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = -2$	<p>Aluksi lavennan murtoluvut vasemmalla puolella, että niillä on yhteinen nimittäjä.</p> <p>Lasken vähennyslaskun vasemmalla puolella.</p> <p>Kerron yhtälöä puolittain luvulla 20.</p> <p>Sain ratkaisuksi <math>x = -40</math></p>
	$20 \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{5}\right) = -2 \cdot 20$	$\frac{5x}{20} - \frac{4x}{20} = -2$	
	$\frac{20x}{4} - \frac{20x}{5} = -40$	$\frac{x}{20} = -2$	
	$5x - 4x = -40$	$20 \cdot \frac{x}{20} = -2 \cdot 20$	
	$x = -40$	$x = -40$	
			

- Miksi Kalle kertoi yhtälöä aluksi luvulla 20? *Kalle kertoi luvulla 20, jotta pääsisi eroon vasemman puolen murtoluvuista, joiden nimittäjänä on 4 ja 5. Luku 20 on jaollinen sekä luvulla 4, että luvulla 5, joten vasen puoli saadaan sievennettyä muotoon, jossa ei ole murtolukuja.*
- Miksi Leena lavensi murtoluvut vasemmalla puolella ensimmäiseksi? *Leena lavensi murtoluvut ensin, jotta murtoluvut voitaisiin laskea yhteen yhtälön vasemmalla puolella. Jos murtoluvulla ei ole yhteinen nimittäjä, ei niiden välistä yhteen- tai vähennyslaskua voi suorittaa.*

c) Mitä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia huomaat Kallen ja Leenan ratkaisutavassa? *Yhtäläisyyksiä on mm. sama ratkaisu ja molemmat kertovat luvulla 20 yhtälöä, jossain vaiheessa omaa ratkaisuaan. Eroavaisuuksia on mm., että Leena lavensi murtolukuja, kun taas Kalle ei. Kalle lähti ratkaisemaan yhtälöä kertomalla ensin.*

d) Ovatko Kalle ja Leena päätyneet oikeaan ratkaisuun? Mistä tiedät tämän? (Kirjoita tarkistus perusteluksi alle) *Sijoitetaan saatu vastaus alkuperäiseen yhtälöön ja tarkistetaan näin vastaus.*

$$\begin{aligned} \frac{-40}{4} - \frac{-40}{5} &= -2 \\ -10 - (-8) &= -2 \\ -2 &= -2 \end{aligned}$$

*Kalle ja Leena ovat päätyneet oikeaan ratkaisuun.*

e) Kumpi ratkaisutavoista (Kallen vai Leenan) on mielestäsi yksinkertaisempi? Perustele.

*Kallen tapa toimii, koska yhteisen jaettavan päättelyminen ei ole liian vaikeaa.*

*Toisaalta Leenan tapa on varmempi ja palauttaa mieleen murtoluvuilla laskemisen sääntöjä.*

**Tehtävä 1** Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön  $\frac{1}{4}(x + 3) = 2$  seuraavilla tavoilla:

Ensin kerroin sulkeet auki.

Seuraavaksi vähensin molemmilta puolilta  $\frac{3}{4}$ .

Lopuksi kerroin molemmilta puolilta luvulla 4 ja sain ratkaisuni.



**Kallen ratkaisu**

$$\frac{1}{4}(x + 3) = 2$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = 2$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2 - \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4}x = \frac{8}{4} - \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4}x = \frac{5}{4}$$

$$4 \cdot \frac{1}{4}x = \frac{5}{4} \cdot 4$$

$$x = 5$$

**Leenan ratkaisu**

$$\frac{1}{4}(x + 3) = 2$$

$$4 \cdot \frac{1}{4}(x + 3) = 2 \cdot 4$$

$$x + 3 = 8$$

$$x + 3 - 3 = 8 - 3$$

$$x = 5$$

Ensiksi kerroin yhtälöä molemmin puolin luvulla 4.

Sitten vähensin luvun 3 molemmilta puolilta.

Tässä on ratkaisuni.



a) Mitä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia huomaat Kallen ja Leenan ratkaisutavassa? *Yhtäläisyyksiä on, että molemmat ovat kertoneet yhtälöä puolittain luvulla 4 (jossain vaiheessa yhtälön ratkaisua) ja päätyneet samaan ratkaisuun. Eroavaisuutena Leena ei ole kertonut sulkeita auki ja kumpikin vähentänyt puolittain yhtälöstä eri luvun, jossain vaiheessa yhtälön ratkaisua.*

b) Ovatko Kalle ja Leena päätyneet oikeaan ratkaisuun? Mistä tiedät tämän? (Kirjoita tarkistus perusteluksi alle) *Kyllä ovat. Sijoitetaan saatu vastaus alkuperäiseen yhtälöön.*

$$\frac{1}{4}(5 + 3) = 2$$

$$\frac{1}{4} \cdot 8 = 2$$

$$2 = 2$$

c) Kumpi ratkaisutavoista (Kallen vai Leenan) on mielestäsi soveltuvampi tälle yhtälölle? Perustele.

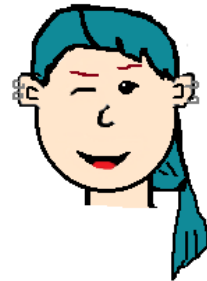
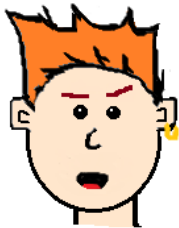
*Esim. Leenan ratkaisutapa, koska siinä ei tarvitse laskea murtoluvuilla. Leenan tavassa sulkujen murtolukukerrointa kerrotaan sopivasti, jotta sulkujen kerroin on luku 1 eli sulkujen kertomiselta auki vältetään myös.*

**Tehtävä 2** Ratkaise seuraavat yhtälöt

<p>a) <math>\frac{y}{3} + \frac{y}{4} = 20</math> <span style="float: right;">K12</span></p> <p><math>12 \cdot \left(\frac{y}{3} + \frac{y}{4}\right) = 20 \cdot 12</math> <span style="float: right;">M M</span></p> <p><math>\frac{12y}{3} + \frac{12y}{4} = 240</math> <span style="float: right;">M</span></p> <p><math>4y + 3y = 240</math> <span style="float: right;">M</span></p> <p><math>7y = 240</math> <span style="float: right;">J7 M M</span></p> <p><math>y = \frac{240}{7}</math></p>	<p>b) <math>\frac{3x+6}{3} + \frac{24+12x}{4} = 8</math> <span style="float: right;">M</span></p> <p><math>x + 2 + 6 + 3x = 8</math> <span style="float: right;">M</span></p> <p><math>4x + 8 = 8</math> <span style="float: right;">V8 M M</span></p> <p><math>4x = 0</math> <span style="float: right;">J4 M M</span></p> <p><math>x = 0</math></p>
<p>c) <math>3(h + 1) = 6(h + 1)</math> <span style="float: right;">J3 M M</span></p> <p><math>h + 1 = 2(h + 1)</math> <span style="float: right;">M</span></p> <p><math>h + 1 = 2h + 2</math> <span style="float: right;">Vh M M</span></p> <p><math>1 = h + 2</math> <span style="float: right;">V2 M M</span></p> <p><math>-1 = h</math></p>	<p>d) <math>e^{-i\omega t} - 1 = e^{-i\omega t} + 4</math> <span style="float: right;">V<math>e^{-i\omega t}</math> M M</span></p> <p><math>-1 = 4t</math> <span style="float: right;">J4 M M</span></p> <p><math>-\frac{1}{4} = t</math></p>

**Tehtävä 3** Kalle, Leena ja Miia ovat ratkaisseet yhtälön  $\frac{t}{3} - 1 = 12$  seuraavilla tavoilla:

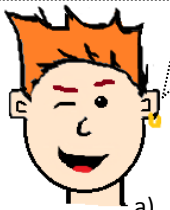
Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	Miian ratkaisu
$\frac{t}{3} - 1 = 12$	$\frac{t}{3} - 1 = 12$	$\frac{t}{3} - 1 = 12$
L1	M	K3
$\frac{t}{3} - 1 + 1 = 12 + 1$	$\frac{t}{3} - \frac{3}{3} = 12$	$3 \cdot (\frac{t}{3} - 1) = 12 \cdot 3$
M M	M	M M
$\frac{t}{3} = 13$	$\frac{t-3}{3} = 12$	$\frac{3t}{3} - 3 = 36$
K3	K3	M
$3 \cdot \frac{t}{3} = 13 \cdot 3$	$3 \cdot \frac{t-3}{3} = 12 \cdot 3$	$t - 3 = 36$
M M	M M	L3
$t = 39$	$t - 3 = 36$	$t - 3 + 3 = 36 + 3$
	L3	M M
	$t - 3 + 3 = 36 + 3$	$t = 39$
	M M	
	$t = 39$	



- Mitä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia huomaat Kallen, Leenan ja Miian ratkaisuisissa? *Kaikki ovat päätyneet samaan vastaukseen ja kertoneet jossain vaiheessa yhtälönratkaisua yhtälöään puolittain luvulla 3. Kaikilla on erilainen ratkaisutapa yhtälölle, joka vaikuttaa välivaiheiden lukumäärään ennen vastausta.*
- Mitä ratkaisutapaa käyttäisit tälle yhtälölle? Miksi? *Ei väärää vastausta, jokainen käyttää itselle sopivinta tapaa, jonka ymmärtää.*
- Kirjoita Kallen, Leenan ja Miian käyttämien muunnosten lyhenteet ratkaisujen viereen näkyville.

**Jokeri 4** Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön  $2t - (2 + 3t) = -4t$  seuraavilla tavoilla:

	Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	
Vähennän molemmilta puolilta $2t$ ja sievennän.	$2t - (2 + 3t) = -4t$	$2t - (2 + 3t) = -4t$	Ensin avasin sulkeet vasemmalla puolella.
Kerron yhtälöä puolittain luvulla $-1$	$2t - 2t - (2 + 3t) = -4t - 2t$	$2t - 2 - 3t = -4t$	Sievennän yhtälön vasenta puolta laskemalla laskut.
Vähennän molemmilta puolilta $3t$ .	$-(2 + 3t) = -6t$	$-t - 2 = -4t$	Lisään molemmille puolille $t$ ja sievennän.
Lopuksi jaan yhtälöä puolittain luvulla $3$ , ratkaisuni yhtälölle on $\frac{2}{3} = t$ .	$-(2 + 3t) \cdot (-1) = -6t \cdot (-1)$	$-t + t - 2 = -4t + t$	Lopuksi jaan puolittain luvulla $-3$ ja sain vastaukseksi $t = \frac{2}{3}$
	$2 + 3t = 6t$	$-2 = -3t$	
	$2 + 3t - 3t = 6t - 3t$	$\frac{-2}{-3} = \frac{-3t}{-3}$	
	$2 = 3t$	$\frac{2}{3} = t$	
	$\frac{2}{3} = \frac{3t}{3}$		
	$\frac{2}{3} = t$		



- a) Mitä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia huomaat Kallen ja Leenan ratkaisussa? *Yhtäläisyytenä; molemmat ovat käyttäneet muunnoksia ratkaistessaan yhtälöä oikein ja päätyneet täten samaan ratkaisuun. Eroavaisuutena ovat erilaiset ratkaisutavat alussa suluista eroon pääsemiseksi.*
- b) Mitä hyötyjä Kallen ratkaisutavassa on? Entä Leenan? *Leenan ratkaisutavassa sulut on avattu kertomalla sulkujen sisältö näiden edessä olevalla luvulla (joka tässä tapauksessa on  $-1$ ). Kalle välttää sulkujen avaamisen ja mahdollisen merkkivirheen syntymisen, kun hän kertoo yhtälöä (rivillä 4) puolittain  $-1$ , jolloin sulkujen eteen jää positiivinen luku  $1$  ja sulut voi jättää pois.*
- c) Miten itse ratkaisisit kyseisen yhtälön? Perustele.

**Jokeri 5** Ratkaise seuraavat yhtälöt

a)

$$7 = \frac{4y}{3} \quad K3$$

$$3 \cdot 7 = \frac{4y}{3} \cdot 3 \quad MM$$

$$21 = 4y \quad J4MM$$

$$\frac{21}{4} = y$$

b)

$$\frac{2x}{3} - 1 = 4x + \frac{1}{2} \quad K6$$

$$6\left(\frac{2x}{3} - 1\right) = 6\left(4x + \frac{1}{2}\right) \quad MM$$

$$\frac{12x}{3} - 6 = 24x + \frac{6}{2} \quad MM$$

$$4x - 6 = 24x + 3 \quad V4xMM$$

$$-6 = 20x + 3 \quad V3MM$$

$$-9 = 20x \quad J20MM$$

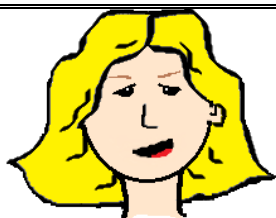
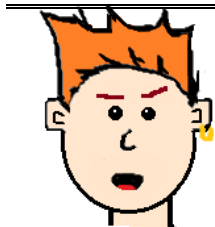
$$-\frac{9}{20} = x$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } -a &= \frac{a(x+1)}{2} && \text{K2} \\
 2(x-a) &= \frac{2a(x+1)}{2} && \text{MM} \\
 2x-2a &= ax+a && \text{Vax MM} \\
 2x-ax-2a &= a && \text{L2 MM} \\
 2x-ax &= a+2a && \text{MM} \\
 x(2-a) &= 3a && \text{J}(2-a) \text{ MM} \\
 x &= \frac{3a}{2-a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } 3(h+1) &= 6(h+2) && \text{J3 MM} \\
 h+1 &= 3(h+2) && \text{M} \\
 h+1 &= 3h+6 && \text{Vh MM} \\
 1 &= 2h+6 && \text{V6 MM} \\
 -5 &= 2h && \text{J2 MM} \\
 -\frac{5}{2} &= h
 \end{aligned}$$

**Jokeri 6** Kalle, Leena ja Miia ovat ratkaisseet yhtälön  $8 - 4(x - 3) = 40$  seuraavilla tavoilla:

Kallen ratkaisu	Leenan ratkaisu	Miian ratkaisu
$8 - 4(x - 3) = 40$	$8 - 4(x - 3) = 40$	$8 - 4(x - 3) = 40$
$8 - 4x - 12 = 40$	$8 - 8 - 4(x - 3) = 40 - 8$	$\frac{8}{4} - \frac{4(x - 3)}{4} = \frac{40}{4}$
$-4x - 4 = 40$	$-4(x - 3) = 32$	$2 - x + 3 = 10$
$-4x - 4 + 4 = 40 + 4$	$\frac{-4(x - 3)}{-4} = \frac{32}{-4}$	$x + 5 = 10$
$-4x = 44$	$x - 3 = -8$	$x + 5 - 5 = 10 - 5$
$\frac{-4x}{-4} = \frac{44}{-4}$	$x - 3 + 3 = -8 + 3$	$x = 5$
$x = -11$	$x = -5$	



- Käy huolella lävitse Kallen, Leenan ja Miian ratkaisu.
- Kuka ratkaisi yhtälön oikein? Leena.
- Ympyröi virheellisiin ratkaisuihin kohta, jossa virhe on tapahtunut.
- Ratkaise virheelliset ratkaisut uudelleen siten, että vastaus on oikein. (Jatka siis ratkaisua siitä kohti, missä se viimeisen kerran oli oikein ja yritä edetä siten kuin ratkaisija oli edennyt)

**Kallen korjattu ratkaisu**

$$\begin{aligned}
 8 - 4x + 12 &= 40 && \text{M} \\
 -4x + 20 &= 40 && \text{V20} \\
 -4x + 20 - 20 &= 40 - 20 && \text{MM} \\
 -4x &= 20 && \text{J-4 MM}
 \end{aligned}$$

**Miian korjattu ratkaisu**

$$\begin{aligned}
 2 - x + 3 &= 10 && \text{M} \\
 -x + 5 &= 10 && \text{V5} \\
 -x + 5 - 5 &= 10 - 5 && \text{MM} \\
 -x &= 5 && \text{K-1 MM}
 \end{aligned}$$

$x = -5$

$x = -5$

**RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)**

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

**Kotitehtävä 1** Ratkaise seuraavat yhtälöt

a)  $12x - (5x - 2) = 23$  M

$12x - 5x + 2 = 23$  M

$7x + 2 = 23$  V2 M M

$7x = 21$  J7 M M

$x = 3$

b)  $3y + \frac{y}{3} = 20$  K3

$3 \cdot (3y + \frac{y}{3}) = 3 \cdot 20$  M M

$9y + y = 60$  M

$10y = 60$  J10 M M

$y = 6$

c)  $2(3 + y) = 18$  J2 M M

$3 + y = 9$  V3 M M

$y = 6$

**Kotitehtävä 2** Mitä olet oppinut sulku- ja murtoyhtälöiden ratkaisemisesta?**Itsearviointi (täytetään yksin aina luvun päätteeksi)**

EOS = En osaa sanoa

1=Erittäin heikosti

7=Erinomaisesti

**Miten hyvin osaat seuraavat asiat**

- Lausekkeen ja yhtälön ero
- Yhtälön tasapaino
- Tutkia, onko yhtälö tosi/epätosi

1 2 3 4 5 6 7 EOS

1 2 3 4 5 6 7 EOS

1 2 3 4 5 6 7 EOS