

Luku 5 Kertaus

Tehtävä 1 Kerratkaa oppimanne asiat yhdessä keskustellen.

- Samanmuotoiset termit
- Lausekkeen ja yhtälön ero
- Yhtälön totuusarvon tutkiminen
- Yhtälön ratkaisun etsiminen
- Yhtälön ratkaisun tarkistaminen
- Eri muunnokset ja niiden käyttäminen
- Tyyppeä $2t + 5 = 5t - 1$ olevan yhtälön ratkaiseminen

Toimintaohje: Tehtävässä 1 oppilaat kuvailevat omin sanoin toisilleen ääneen kurssin keskeisimpiä ideoita.

Tehtävä 2 Tutki, ovatko seuraavat yhtälöt tosia vai epätosia. Perustele vastauksesi suullisesti.

a) $6 \cdot 12 = 4 \cdot 12 + 2 \cdot 12$

$6 \cdot 12 = 6 \cdot 12$

tosí, molemmilta puolilla yhtälöä on yhtä paljon ($6 \cdot 12 = 72$).

b) $3 + 2 = 8$

$5 \neq 8$

epätosí, sillä vasemmalla puolella yhtälöä on 5 ja oikealla 8.

c) $y + 2 = 4 + 5$

$y + 2 = 9$

tosí, kun muuttujan y arvo on 7, muulloin epätosí.

d) $-180 = -(-180)$

$-180 \neq 180$

epätosí, sillä vasemmalla puolella yhtälöä on -180 ja oikealla 180.

Tehtävä 3

a) Laske lausekkeen $3x - 5$ arvo, kun $x = -2$.

Sijoitetaan muuttujan x arvo lausekkeeseen, $3(-2) - 5 = -6 - 5 = -11$ eli lausekkeen arvo on -11.

b) Onko alla yhtälö/yhtälöitä, joiden ratkaisu on $x = 3$?

$x + 5 = x + 5$ $x^2 = 4$ $2x = 5 + 1$

$x + 3 = 4$ $2(x - 3) = 0$ $4 = x + x$

Vastaus ja perustelu: *Kyllä, yhtälöt $2x = 5 + 1$, $x + 5 = x + 5$ ja $2(x - 3) = 0$. Sijoittamalla niihin muuttujan x paikalle 3 saadaan yhtälö, joka on tosí.*

Tehtävä 4 Täydennä matemaattinen ja sanallinen esitys

Matemaattinen esitys	Muunnos	Sanallinen selitys
$-5 - y = y + 2$		
$-5 - y + y = y + y + 2$	Ly	<i>Lisään</i> molemmille puolille y : n .

$$-5 = 2y + 2$$

$$-5 - 2 = 2y + 2 - 2$$

$$-7 = 2y$$

$$-\frac{7}{2} = y$$

MM

Muokkaan yhtälöä puolittain laskemalla laskun $-y + y$ vasemmalla ja $y + y$ oikealla puolella.

V2

Vähennän puolittain luvun 2.

MM

Muokkaan yhtälöä puolittain suorittamalla laskut $-5 - 2$ ja $+2 - 2$.

J2MM

Jaan yhtälön molempia puolia luvulla 2 ja muokkaan lausekkeita.

Yhtälön ratkaisu on $-\frac{7}{2}$. (tai $y = -\frac{7}{2}$)

Tehtävä 5 Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $2x + 5 = 3x - 3 + 5$ seuraavilla tavoilla.

Kallen ratkaisu

$$2x + 5 = 3x - 3 + 5$$

$$2x + 5 - 5 = 3x - 3 + 5 - 5$$

$$2x + 5 = 3x - 3$$

$$2x - 2x + 5 = 3x - 2x - 3 + 3$$

$$5 = 3x - 2x$$

$$5 = x$$

Leenan ratkaisu

$$2x + 5 = 3x - 3 + 5$$

$$2x + 5 = 3x + 2$$

$$2x + 5 = 5x$$

$$2x = 5x - 5$$

$$2x - 2x = 5x - 5 - 2x$$

$$0 = 3x - 5$$

$$0 + 5 = 3x - 5 + 5$$

$$5 = x$$



Huom. Tehtävässä 5 sekä Kalle että Leena ovat tehneet virheen, vaikka vastaus on sama. Kalle on laskenut virheellisesti vaiheen $5 - 5$ ja Leena vaiheen $3x + 2$. Kysy oppilailta, millaisia ajatuksia tämä heissä



a) Minkä muunnokset Kalle on tehnyt ensimmäisenä? *Vähentänyt luvun 5 puolittain eli V5* Entä Leena? *Leena on muokannut yhtälön vasenta puolta eli M.*

b) Tarkista, ovatko Kallen ja Leenan vastaukset oikein.

Tarkistetaan sijoittamalla $x=5$ riville 1. Kallen yhtälöstä tulee vasemmalta puolelta: $2 \cdot 5 + 5 = 15$ ja oikealta $3 \cdot 5 - 3 + 5 = 17$. Nämä ovat eri suuret, joten Kallen ratkaisu on väärä. Leenalla puolestaan vasen puoli saa arvoksi $2 \cdot 5 + 5 = 15$ ja oikea puoli $3 \cdot 5 - 3 + 5 = 17$. Molemmat ovat siis ratkaisseet yhtälön väärin.

c) Ympyröi virheet. Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi välttää.

Kallen virhe: Muista ottaa huomioon kaikki termit, joita lasket.

Leenan virhe: Yhdistä vain samanmuotoiset termit.

Tehtävä 6 Ratkaise seuraavat yhtälöt.

a) $y + 3y = 10 - 2$

MM

|| b)

$b - 2 = 3b + 4$

Vb

$$4y = 8$$

$$\frac{4y}{4} = \frac{8}{4}$$

$$y = 2$$

J4

MM

$$b - b - 2 = 3b - b + 4$$

$$-2 = 2b + 4$$

$$-2 - 4 = 2b + 4 - 4$$

$$-6 = 2b$$

$$\frac{-6}{2} = \frac{2b}{2}$$

$$-3 = b$$

MM

V4

MM

J2

MM

c)

$$1 + \frac{a}{5} = 7$$

$$1 - 1 + \frac{a}{5} = 7 - 1$$

$$\frac{a}{5} = 6$$

$$5 \cdot \frac{a}{5} = 6 \cdot 5$$

$$a = 30$$

V1

MM

K5

MM

d)

$$5(2z - 4) = 20$$

$$\frac{5(2z-4)}{5} = \frac{20}{5}$$

$$2z - 4 = 4$$

$$2z - 4 + 4 = 4 + 4$$

$$2z = 8$$

$$\frac{2z}{2} = \frac{8}{2}$$

$$z = 4$$

J5

MM

L4

MM

J2

MM

Tehtävä 7

a) Laske yhtälö $-2(y + 4) + 6(y + 4) = 12$ vähintään kahdella eri tavalla.

Tavalla 1

$$-2(y + 4) + 6(y + 4) = 12$$

$$4(y + 4) = 12$$

$$y + 4 = 3$$

$$y = -1$$

M

J4 MM

V4 MM

Tavalla 2

$$-2(y + 4) + 6(y + 4) = 12$$

$$-2y - 8 + 6y + 24 = 12$$

$$4y + 16 = 12$$

$$4y = -4$$

$$y = \frac{-4}{4}$$

$$y = -1$$

M

M

V16MM

J4 M

M

Tavalla 3

$$-2(y + 4) + 6(y + 4) = 12$$

$$-1(y + 4) + 3(y + 4) = 6$$

$$(y + 4)(3 - 1) = 6$$

$$(y + 4)2 = 6$$

$$y + 4 = 3$$

$$y = -1$$

J2MM

M

M

J2MM

V4MM

b) Kumpi ratkaisutapa on mielestäsi sopivampi tähän tehtävään? Miksi? *Esimerkkivastauksista tapa 1, sillä se on lyhyin.*

Jokeri 8 Kalle ja Leena ovat ratkoneet yhtälöitä ja vertailevat nyt ratkaisujaan samoille yhtälöille. Vastaa annettuihin kysymyksiin ja toimi opettajana tarkistaen Kallen ja Leenan ratkaisut yhtälöille.



Kallen ratkaisu

$$4b + 16 = -8$$

$$\frac{4b}{4} + \frac{16}{4} = \frac{-8}{4}$$

$$b + 4 = -2$$

$$b + 4 - 4 = -2 - 4$$

$$b = -6$$

Leenan ratkaisu

$$4b + 16 = -8$$

$$\frac{4b + 16}{4} = \frac{-8}{4}$$

$$b + 16 = -2$$

$$b + 16 - 16 = -2 - 16$$

$$b = -18$$



- a) Kerro, mitä Kalle ja Leena ovat tehneet ratkaistessaan yhtälön $4b + 16 = -8$. Kumpi ratkaisi oikein?
Kalle. Molemmat ovat jakaneet yhtälöä puolittain luvulla 4. Leena ei kuitenkaan ole muistanut jakaa lukua 16 luvulla 4.
- b) Ympyröi virheellisestä ratkaisusta kohta, jossa virhe on tapahtunut.
- c) Muotoile omin sanoin lyhyt ohje, miten kyseisen virheen voi yhtälöä ratkaistaessa välttää.

Jakaminen täytyy suorittaa kaikille yhtälön termeille.

Jokeri 9 Täydennä yhtälön ratkaisun matemaattinen esitys kahdella eri tavalla.

Matemaattinen esitys	Muunnos	Matemaattinen esitys	Muunnos
$\frac{8 + 20x}{4} = 6x$		$\frac{8 + 20x}{4} = 6x$	
	K4		M
$4 \cdot \frac{8 + 20x}{4} = 4 \cdot 6x$		$2 + 5x = 6x$	
	M M		V5x
$8 + 20x = 24x$		$2 + 5x - 5x = 6x - 5x$	
	V20x		M M
$8 + 20x - 20x = 24x - 20x$		$2 = x$	
	M M		
$8 = 4x$			
	J4 M M		
$2 = x$			

Jokeri 10 Muodosta yhtälö ja ratkaise se.

- a) Tiina ja Ville jakavat 60 euron palkan. Tiina teki töitä kaksi kertaa niin paljon kuin Ville. Kuinka paljon kumpikin saa palkkaa? *Ratkaisu: Merkitään kirjaimella p Villen palkkaa. Nyt Tiinan palkka on $2p$ (koska Tiina teki töitä kaksi kertaa enemmän kuin Ville). Muodostetaan yhtälö $p + 2p = 60$ josta voidaan ratkaista Villen ja Tiinan palkka.*

$$\begin{array}{ll}
 p + 2p = 60 & \text{M} \\
 3p = 60 & \text{J3} \\
 \frac{3p}{3} = \frac{60}{3} & \text{MM} \\
 p = 20 &
 \end{array}$$

Vastaus: Villen palkka oli 20 euroa ja Tiinan palkka oli 40 euroa.

- b) Kolmen peräkkäisen kokonaisluvun summa on 108. Mikä on pienin luvuista?

Ratkaisu: Merkitään ensimmäistä lukua n , toinen on silloin $n + 1$ ja kolmas $n + 2$. Tällöin

$$\begin{array}{ll}
 n + (n + 1) + (n + 2) = 108 & \text{M} \\
 3n + 3 = 108 & \text{V3MM} \\
 3n = 105 & \text{J3MM} \\
 n = 35 &
 \end{array}$$

Vastaus: Kolme lukua ovat 35, 36 ja 37 eli pienin on 35.

- c) Lippu Robinin konserttiin maksoi aikuisille (eli yli 12-vuotiaille) 20 euroa ja alle 12-vuotiaille 10 euroa. Selvitä, montako lasten ja montako aikuisten lippua myytiin, kun tiedetään, että lippuja myytiin yhteensä 350 kappaletta ja lipunmyyntituloja saatiin yhteensä 4000 euroa.

Ratkaisu: Merkitään yli 12-vuotiaiden lippujen lukumäärää kirjaimella y ja lasten lippujen lukumäärää kirjaimella x .

Nyt tiedetään, että $x + y = 350$ (eli kaikkien myytyjen lippujen lukumäärän on oltava 350kpl)
 Lisäksi tiedetään, että $10x + 20y = 4000$ (Eli lipunmyyntitulot mydyistä lipuista ovat yhteensä 4000 euroa).

Jos muuttujan x ratkaisee ensimmäisestä yhtälöstä, saadaan että $x = 350 - y$. Sijoitetaan tämä toiseen yhtälöön, jolloin saadaan uusi yhtälö $10(350 - y) + 20y = 4000$ ja ratkaistaan se:

$$\begin{aligned} 10(350 - y) + 20y &= 4000 && \text{M} \\ 3500 - 10y + 20y &= 4000 && \text{M} \\ 3500 + 10y &= 4000 && \text{V3500MM} \\ 10y &= 500 && \text{J10MM} \\ y &= 50 \end{aligned}$$

Lasten lippujen lukumäärä (eli x) saadaan, kun sijoitettiin ratkaistu y yhtälöön $x = 350 - y$ eli $x = 350 - 50 = 300$.

Vastaus: Aikuisten lippuja myytiin 50 kappaletta ja Lasten lippuja myytiin 300 kappaletta.

Jokeri 11 Muodosta mahdollisimman haastava yhtälö ja ratkaise se.

RYHMÄARVIOINTI (ryhmätaidot selitetty tarkemmin sivulla 2)

Ryhmätaito	Onnistuminen				
Autoimme ja rohkaisimme toisiamme					
Keskustelimme toisemme huomioiden					
Toistimme asioita tarvittaessa					
Keskityimme perusteluihin vastausten sijaan					
Hyödynsimme virheitä oppiaksemme					

Loppuitsearviointissa arvioidaan osaamista kurssin lopuksi.

Loppuitsearviointi

Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

1 = Erittäin heikosti

7 = Erinomaisesti

Miten hyvin osaat seuraavat asiat

- | | | | | | | | |
|--|---|---|---|---|---|---|---|
| • Lausekkeen rakenne | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Lausekkeen sieventäminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Lausekkeen ja yhtälön ero | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Yhtälön tasapaino | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Tutkia, onko yhtälö tosi/epätosi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Yhtälön ratkaisun etsiminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Yhtälön ratkaisun tarkistaminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Eri muunnokset | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Sopivan muunnoksen löytäminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Tyyppiä $2t + 5 = 5t - 1$ olevan yhtälön ratkaiseminen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Kertoa sanallisesti/ääneen, miten tehtävä ratkaistaan | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Olen oppinut kurssilla käsitellyt asiat. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin keskittymään perusteluihin vastausten sijaan. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistun löytämään ja esittämään kysymyksiä. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin kuvailemaan ajatteluni muille. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin vertailemaan tehtävien eroavaisuuksia ja yhtäläisyyksiä. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin löytämään ja vertailemaan eri ratkaisutapoja | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| • Onnistuin hyödyntämään virheitä oppiakseni. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Minkä asian olet oppinut parhaiten?

Missä sinulla on eniten opittavaa?

Palautetta yhtälöiden opiskelusta: