

# Yhtälönratkaisu – oppilaan materiaali



Opetus- ja  
kulttuuri-  
ministeriö



LUMA-KESKUS SUOMI

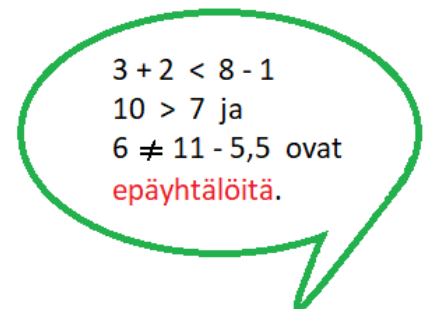
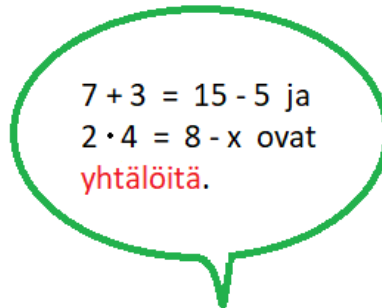
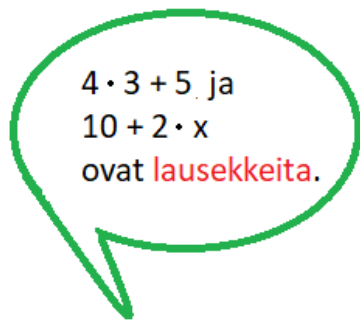


LAPIN YLIOPISTO  
UNIVERSITY OF LAPLAND

Nimi: \_\_\_\_\_

Luokka: \_\_\_\_\_

## 1. Tosi ja epätosi väitteitä



### Alkupalat

Kirjoita taulukkoon T, jos väite on tosi ja E, jos väite on epätosi.

Väite	Totuusarvo T tai E
$5 > 3$	
$16 < 8$	
$19 = 26$	
$9 < 28$	
$64 = 64$	
$3 + 4 = 4 + 3$	
$10 - 4 > 10 - 2$	
$8 + 4 = 12 + 5$	
$4 + 2 = 3 + 3$	

Keksi **yhtälö**, joka on tosi. \_\_\_\_\_

Keksi **yhtälö**, joka on epätosi. \_\_\_\_\_

Kirjoita **yhtälö** lapulle ja antaa kaverisi tutkia onko se tosi vai epätosi.

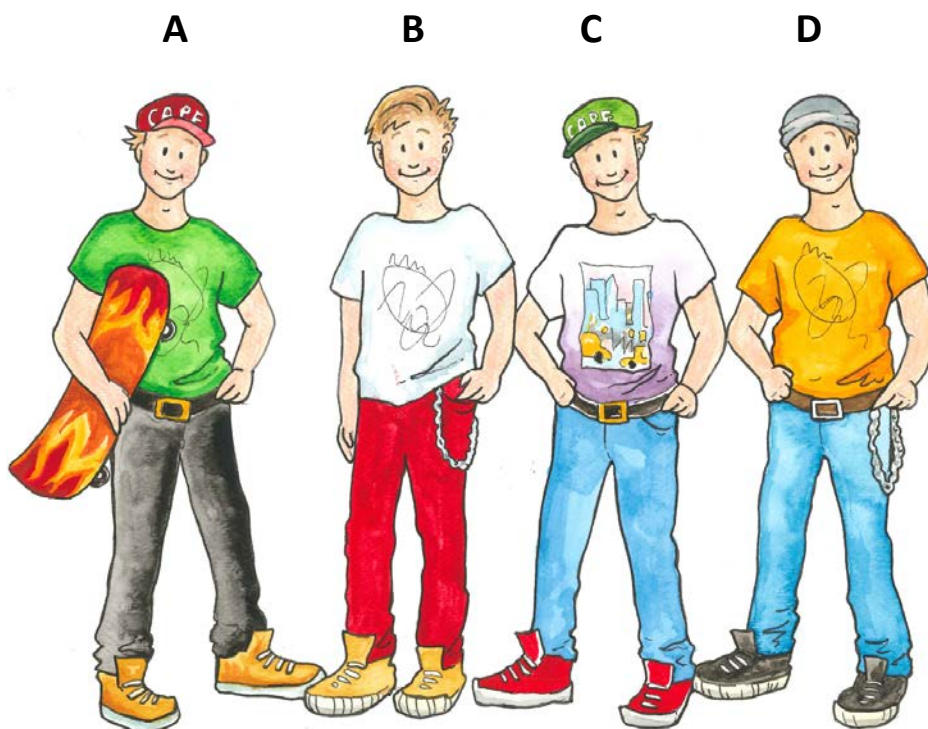
**Yhtälö on tosi, kun yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla olevilla lausekkeilla on sama arvo.**

$$12 = 12$$

$$7 + 4 = 2 + 9$$

$$2 \cdot (3 + 2) = 14 - 4$$

**Kuka on kyseessä?**



Täydennä taulukko.

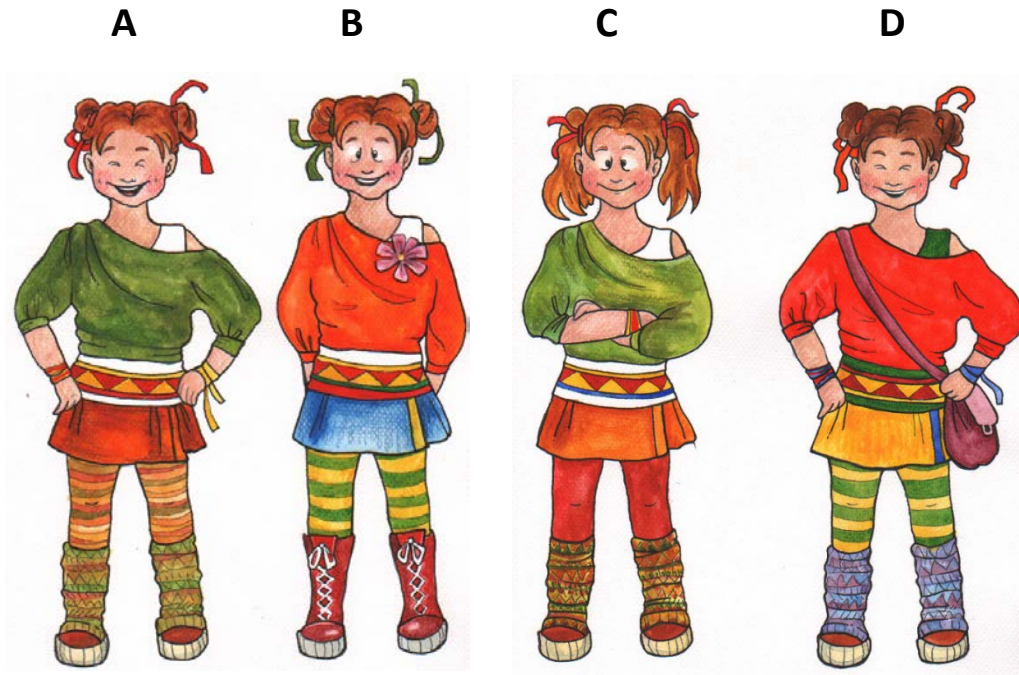
Väite	Kenen kohdalla väite on totta?
Pojalla X on pipo päässä.	
Pojalla X on vyö.	
Pojalla X on punaiset housut.	
Pojalla X on silmälasit.	

<b>Väite</b>	<b>Kenen kohdalla väite on totta?</b>
Pojalla X ei ole sinisiä housuja.	
Pojalla X ei ole vyötä.	
Pojalla X ei ole kaulaketjua.	
Pojalla X ei ole päähinettä.	

<b>Väite</b>	<b>Kenen kohdalla väite on totta?</b>
Pojalla X on vyö ja päässä lippis.	
Pojalla X on vihreä paita ja siniset farkut.	
Pojalla X on kengät jalassa ja paita päällä.	
Pojalla X on keltaiset kengät ja lippis päässä.	

<b>Väite</b>	<b>Kenen kohdalla väite on totta?</b>
Pojalla X on punaiset housut tai vihreä paita.	
Pojalla X on vihreä paita tai hänellä on vyö.	
Pojalla X on pipo päässä tai kengät jalassa.	
Pojalla X ei ole päähinettä tai hänellä ei ole avainketjua.	

**Tehtäviä**



1. Täydennä alla oleva taulukko.

Väite	Kenen kohdalla väite on totta?
Tytöllä X on vihreä paita.	
Tytöllä X ei ole kukkaa rinnassa.	
Tytöllä X on punaiset lettinauhat ja keltainen hame.	
Tytöllä X on vihreä lettinauha tai raidalliset sukkahousut.	

2. Keksi tyttöjen kuvasta väite, jolla on

- a) yksi ratkaisu
- b) kolme tai kaksi ratkaisua
- c) ei yhtään ratkaisua
- d) ratkaisuna kaikki neljä henkilöä.

Valmistaudu esittämään väitteesi muille.

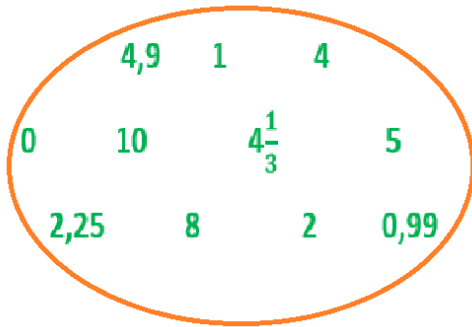


3. Aseta loogiset palat sopiviin alueisiin alustalla. Käy läpi kaikki palat, vaikka kaikkia niistä ei aina voi käyttää. Jos voit, ota lopuksi valokuva ratkaisustasi. Käytä seuraavia alustoja.

- a) Reikä, **ei** reikää
- b) Punainen **ja** reiällinen
- c) Sininen **tai** iso.

## 2. Muuttuja ja lauseke

Mikä luku on kyseessä?



Väite	Mitkä luvut yllä olevasta joukosta toteuttavat väitteen?
Luku $x$ on suurempi kuin yhdeksän.	
Luku $x$ on lukusuoralla lukujen 4 ja 5 välissä.	
Luvussa $x$ on viisi tuhannesosaa.	
Luku $x$ on pienempi kuin yksi.	

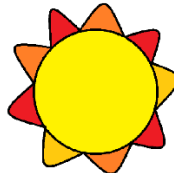
Väite	Mitkä luvut yllä olevasta joukosta toteuttavat väitteen?
Luku $x$ ei ole kokonaisluku.	
Luku $x$ on suurempi kuin 1 ja pienempi kuin 4.	
Luku $x$ on suurempi tai yhtä suuri kuin 4,9.	
Luku $x$ ei ole kokonaisluku eikä se ole suurempi kuin 4.	

Väite	Mitkä luvut yllä olevasta joukosta toteuttavat väitteen?
Luku $x$ kerrottuna luvulla kaksi on yhtä suuri kuin 4,5.	
Kun luku $x$ kerrotaan luvulla 1, tulos on luku $x$ .	
Kun luku $x$ kerrotaan luvulla 0, tulos on luku $x$ .	
Kun luku $x$ kerrotaan luvulla 3 ja tuloksesta vähennetään 4, tulos on 20.	

Lausekkeessa  $2 \cdot x + 1$  kirjain  $x$  on **muuttuja**. Se voi saada minkä arvon vain annetussa lukujoukossa. Sen arvo vaihtelee.

### Lausekepelii

Pelatkaa pareittain lausekepeliiä, esimerkiksi  $2 \cdot x + 1$  tai  $2 \cdot x - 6$ .



### Tehtäviä

Tehtävät 1 – 4 liittyvät lausekepeliiin  $2 \cdot x + 1$ .

1. Tiina sai lausekepelissä  $2 \cdot x + 1$  nopan silmäluvun 4. Mikä luku on ruudussa, jonka hän voi vallata itselleen? \_\_\_\_\_
2. Ville sai lausekepelissä  $2 \cdot x + 1$  nopan silmäluvun 1. Mikä luku on ruudussa, jonka hän voi vallata itselleen? \_\_\_\_\_
3. Tiina näkee, että pelissä  $2 \cdot x + 1$  on vielä vapaana ruutu, jossa on luku 7. Mikä tulos hänen on saatava nopalla, että hän voi peittää ruudun? \_\_\_\_\_
4. Ville näkee, että pelissä  $2 \cdot x + 1$  on vielä vapaana ruudut 3, 9 ja 13. Mikä tulos hänen on saatava nopalla, jotta hän voi peittää vuorollaan yhden ruudun? \_\_\_\_\_



Tehtävät 5 – 8 liittyvät lausekepeleihin  $2 \cdot x - 6$ .

5. Tiinan sai lausekepelissä  $2 \cdot x - 6$  nopan silmäluvun 4. Mikä luku on ruudussa, jonka hän voi vallata itselleen? \_\_\_\_\_
6. Ville sai lausekepelissä  $2 \cdot x - 6$  nopan silmäluvun 1. Mikä luku on ruudussa, jonka hän voi vallata itselleen? \_\_\_\_\_
7. Tiina näkee, että pelissä  $2 \cdot x - 6$  on vielä vapaana ruutu, jossa on luku 6. Mikä tulos hänen on saatava nopalla, että hän voi peittää ruudun? \_\_\_\_\_
8. Ville näkee, että pelissä  $2 \cdot x - 6$  on vielä vapaana ruudut 0, -2 ja -4. Mikä tulos hänen on saatava nopalla, jotta hän voi peittää vuorollaan yhden ruudun? \_\_\_\_\_

9. Satu ja Mikko pelasivat lausekepeleitä  $5 \cdot x - 4$ . He laskivat etukäteen pelilaudalla tarvittavat luvut. Täydennä taulukko.



Nopan silmäluku	Lausekkeen $5 \cdot x - 4$ arvo
1	
2	
3	$5 \cdot 3 - 4 = 15 - 4 = 11$
4	
5	
6	

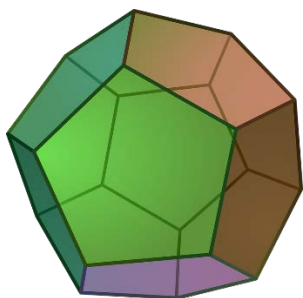
10. Lausekkeessa  $3 \cdot x + 5$  voidaan  $x$ :n paikalle laittaa mikä luku tahansa. Täydennä osittain valmiit rivit. Etsi lisää mahdollisimman erilaisia  $x$ :n arvoja ja kirjoita ne taulukkoon. Laske niitä vastaavat lausekkeen arvot.

$x$ :n arvo	Lausekkeen $3 \cdot x + 5$ arvo
0	
	8
$\frac{2}{3}$	
	2
1,5	

11. Etsikää oma lauseke ja pelatkaa sillä lausekepelii. Voitte halutessanne käyttää murtolukunoppaa.

12. Dodekaedrista saa 12-tahkoisen nopan.

- a) Jos silmäluvut ovat 1, 2, 3, ..., 11, 12 niin mitä lukuja lausekepelin  $3 \cdot x - 4$  ruuduissa tulee olla? Tee taulukko vihkoosi.
- b) Jos silmäluvut ovat -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, niin mitä lukuja lausekepelin  $x + 4$  ruuduissa tulee olla? Tee taulukko vihkoosi.



### 3. Yhtälön ratkaisut

#### Alkupalat

1) Kirjoita viivalle merkki  $<$ ,  $>$  tai  $=$  niin, että väite on tosi.

$$8 + 7 \text{ ___ } 10 - 2$$

$$7 + 4 \text{ ___ } 7 + 5$$

$$4 + 4 \text{ ___ } 10 - 2$$

$$3 \cdot 5 \text{ ___ } 5 \cdot 3$$

$$3 \text{ ___ } 10 - 6$$

$$3 \cdot 4 \text{ ___ } 4 + 4 + 4$$

$$2 \cdot 4 + 3 \text{ ___ } 14 - 4$$

$$6 \cdot 3 \text{ ___ } 2 \cdot 9$$



2) Kirjoita viivalle sellainen luku, että yhtälö on tosi.

$$5 = 2 \cdot 4 - \text{ ___ }$$

$$4 + 8 = \text{ ___ } + 5$$

$$\text{ ___ } + 7 = 1 + 9$$

$$3 \cdot \text{ ___ } + 2 = 23$$

$$4,5 + 3 = 6 + \text{ ___ }$$

$$5\frac{2}{3} + \text{ ___ } = 10\frac{6}{7} + \frac{1}{7}$$

$$2,3 - 0,8 = \text{ ___ } + 1$$

$$\text{ ___ } + 2,5 = 4 + \text{ ___ }$$

Kun kaksi lauseketta merkitään yhtä suuriksi, saadaan yhtälö.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{lauseke} & & \text{lauseke} \\
 2 \cdot x + 7 & = & 10 - x \\
 & & \text{yhtäsuuruus-} \\
 & & \text{merkki}
 \end{array}$$

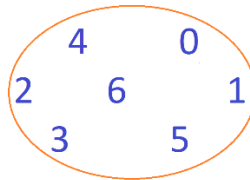
Se, että onko yhtälö tosi, riippuu yleensä muuttujan  $x$  arvosta.

Kun  $x = 1$ , yhtälö  $2 \cdot x + 7 = 10 - x$  on tosi, sillä  $2 \cdot 1 + 7 = 9$  ja  $10 - 1 = 9$ .

Kun  $x = 0$ , sama yhtälö on epätosi, sillä  $2 \cdot 0 + 7 = 7$  ja  $10 - 0 = 10$ .

**Yhtälön ratkaisuja ovat ne muuttujan  $x$  arvot, joilla yhtälö on tosi.**

Millä  $x$ :n arvoilla yhtälö on tosi?



Yhtälö	Mitkä luvut yllä olevasta joukosta ovat yhtälön ratkaisuja?
Yhdeksän on yhtä suuri kuin kolme plus luku $x$ . $9 = 3 + x$	$x =$
Kaksi kertaa luku $x$ plus viisi on yhtä suuri kuin luku $x$ plus kymmenen. $2 \cdot x + 5 = x + 10$	$x =$
Luku $x$ on yhtä suuri kuin luku $x$ kertaa luku $x$ . $x = x \cdot x$	$x =$ tai $x =$
Luku $x$ plus luku $x$ plus seitsemän on yhtä suuri kuin luku $x$ plus kymmenen. $x + x + 7 = x + 10$	$x =$

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, ... }

Yhtälö	Mitkä luvut yllä olevasta lukujoukosta ovat yhtälön ratkaisuja?
$500 = 3 \cdot x + 200$	$x =$
$4 \cdot x + 2 = 2 \cdot x + 8$	
$10 = 3 \cdot x - x$	
$2 \cdot x + 5 = 2 \cdot x$	
$x + x + 3 = 2 \cdot x + 5 - 2$	

### Tehtäviä

1. Kirjoita lauseesta yhtälö.

a) Kaksikymmentä on yhtä suuri kuin luku  $x$  plus seitsemätoista.

\_\_\_\_\_

b) Luku  $x$  on yhtä suuri kuin viisi kertaa luku  $x$  miinus neljä.

\_\_\_\_\_

c) Kolme kertaa luku  $x$  plus kaksi on yhtä suuri kuin kymmenen plus luku  $x$ .

\_\_\_\_\_

2. Ratkaise tehtävän 1 yhtälöt joukossa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}.

a)  $x =$  \_\_\_\_\_ b)  $x =$  \_\_\_\_\_ c)  $x =$  \_\_\_\_\_

3. Ratkaise joukossa  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  yhtälö

a)  $3 = x - 5$       b)  $40 - 4 \cdot x = 20$       c)  $5 \cdot x + 2 = x + 14$

d)  $40 - 4 \cdot x = 20 - 2 \cdot x$

a) \_\_\_\_\_ b) \_\_\_\_\_ c) \_\_\_\_\_ d) \_\_\_\_\_

4. Keksi itse yhtälö ja anna sellainen lukujoukko, että yhtälölläsi on siinä joukossa yksi ratkaisu. Voit antaa yhtälösi kaverillesi ratkaistavaksi.

5. Keksi sellainen yhtälö, jossa on muuttuja  $x$  yhtäsuuruusmerkin kummallakin puolella ja jolla on yksi ratkaisu antamassasi joukossa. Voit antaa yhtälösi lapulla kaverillesi ratkaistavaksi.

6. a) Keksi yhtälö, jossa esiintyy muuttuja  $x$ , mutta joka ei ole tosi millään luvulla. b) Keksi yhtälö, jossa esiintyy muuttuja  $x$ , ja jonka toteuttavat kaikki tuntemasi luvut.

7. a) Millä  $x$ :n ja  $y$ :n arvoilla yhtälö  $y + 5 = 2 + x$  on tosi ? b) Toteutuuko yhtälö joillakin muilla  $x$ :n ja  $y$ :n arvoilla? c) Kuinka monella parilla  $x$ :n ja  $y$ :n arvoja yhtälö toteutuu?

Jos yhtälössä on sama muuttuja useammassa eri paikassa, se tarkoittaa aina samaa lukua kerrallaan. Kaksi eri muuttujaa tarkoittavat yleensä eri lukuja, mutta ne voivat tarkoittaa myös samoja lukuja.

## 4. Yhtälön ratkaiseminen päättelämällä

Kun ratkaiset yhtälöitä päättelämällä, voit usein hyödyntää tietojasi laskutoimituksista. **Yhteen- ja vähennyslasku** ovat **käänteisiä laskutoimituksia**, samoin **kerto- ja jakolasku**. Joissakin tilanteissa voi olla hyödyllistä miettiä, **mikä on kokonaisuus ja mitkä ovat sen osat**.



$$x + 7 = 15$$

Kun lukuun  $x$  lisätään seitsemän, niin saadaan luku 15. Siis luvut  $x$  ja 7 ovat yhteensä 15. Saan luvun  $x$  selville vähentämällä seitsemän luvusta 15,  $x = 15 - 7$ ,  $x = 8$ .

$$50 - x = 35$$

Mikä luku pitää vähentää luvusta 50, jotta jäljelle jää 35? Silloin luku  $x$  yhdessä luvun 35 kanssa on 50 ja saan luvun  $x$  selville vähentämällä 35 luvusta 50,  $x = 50 - 35$ ,  $x = 15$ .



$$\frac{12}{x} = 6$$

Luku  $x$  menee kahteentoista kuusi kertaa. Silloin  $6 \cdot x = 12$  ja saan luvun  $x$  selville, kun jaan  $x = \frac{12}{6}$  eli  $x = 2$ .



Joskus yhtälöitä ratkaistessasi voit joutua keksimään aivan uudenlaisia tapoja ajatella. **Yhtäsuuruusmerkki** tarkoittaa kuitenkin aina, että sen **molemmilla puolilla olevat lausekkeet ovat yhtä suuret**. Voit esimerkiksi tehdä yhtälöön muutoksia, kunhan pidät huolta, että yhtäsuuruus säilyy.



$$47 - x - x = 30 - x$$

Kaikki nuo  $x$ :t tarkoittavat samaa lukua. Toisella puolella otetaan sama määrän pois kahdesti ja toisella puolella vain yhden kerran. Minä en nyt ota huomioon yhtä pois otettua  $x$ :ää vasemmalla enkä yhtä pois otettua  $x$ :ää oikealla. Koska kummaltakin puolelta on vähennetty saman verran, minun ei tarvitse ajatella siitä. Silloin  $47 - x = 30$  ja sen ratkaisu on  $x = 17$ .

$$40 + x = 84 - x$$

Yhtälö sanoo, että jos lisään  $x$ :n lukuun 40, niin se on yhtä paljon, kuin jos vähennän  $x$ :n luvusta 84. Sehän tarkoittaa sitä, että jos lisäisin lukuun 40 kaksi kertaa  $x$ :n, niin tulos olisi 84 eli  $40 + 2 \cdot x = 84$ . Ja 84 on 44 suurempi kuin 40, joten  $x$ :n täytyy olla puolet luvusta 44 eli  $x = 22$ .



**Tehtäviä**

1. Ratkaise päättämällä yhtälö

a)  $x - 6 = 13$       b)  $x + 5 = 27$       c)  $4 + x = 13$       d)  $19 - x = 4$

2. Ratkaise päättämällä yhtälö

a)  $3 \cdot x = 36$       b)  $\frac{x}{5} = 7$       c)  $\frac{15}{x} = 3$

3. Ratkaise päättämällä yhtälö

a)  $x - 11 = 42$       b)  $x \cdot 4 = 108$       c)  $3 + x = 46$

4. Ratkaise päätelemällä yhtälö

a)  $\frac{48}{x} = 24$

b)  $45 - x = 23$

c)  $\frac{x}{12} = 4$

5. Ratkaise päätelemällä yhtälö. Tarkista ratkaisusi sijoittamalla, jos olet siitä epävarma.

a)  $x + x + x = 30 + x$

b)  $x + 20 = 2 \cdot x + 6$

c)  $315 + 760 = 700 + x$

6. Ratkaise päätelemällä yhtälö

a)  $3 \cdot x - 2 \cdot x = 10$

b)  $76 - x = 30 + x$

7. Ratkaise päättelöllä yhtälö

a)  $5 \cdot x - 10 = 4 \cdot x + x$       b)  $x + x + 8 = 2 \cdot x + 4 + 4$

8. Ratkaise päättelöllä yhtälö  $\frac{72}{x} = 2 \cdot x$ .

Voit harjoitella yhtälöiden ratkaisemista myös oppimispelien avulla.

Pelaa pingistä tietokoneen kanssa ja ratkaise samalla yhtälöitä.

<http://www.xpmath.com/forums/arcade.php?do=play&gameid=105>

Pelaa laivanupotusta tietokoneen kanssa ja ratkaise samalla yhtälöitä.

<https://www.quia.com/ba/36544.html>

Tunnista yhtälöitä, joilla sama ratkaisu. Palapelin alta paljastuu kuva ja voit voittaa palkinnon.

<http://www.bbc.co.uk/schools/mathsfle/shockwave/games/equationmatch.html>

Tässä vaativassa pelissä tutkijat haluavat funktiokoneesta ulos tiettyjä lukuja. Ethän pelkää negatiivisia lukuja ja niillä laskemista!

<https://www.mangahigh.com/en-gb/games/algebrameltdown>